

Chap. 2 - Référentiels non galiléens

I. Introduction

- Nombreuses applications, notamment les effets liés au **caractère non galiléen du référentiel terrestre** : déviation vers l'Est de la chute des corps, pendule de Foucault, vents/courant géostrophiques, marées...

II. Changements de référentiels

II.1. Rappels

a. Référentiels, vitesse et accélération

- **Référentiel $\mathcal{R}$** = solide de référence $\mathcal{S}$ représenté par un repère cartésien associé $Oxyz$ ou $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ + **HORLOGE**
- Le temps est supposé universel en Mécanique Newtonienne (ou « classique ») donc on confond souvent le référentiel et son solide de référence, symbolisé par le repère. → « $\mathcal{R} = (O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ »
- À connaître : 3 systèmes de coordonnées usuels (cartésien, cylindro-polaire et sphérique), pour représenter le vecteur position $\vec{OM}$, et projeter dans la base associée.

DÉFINITIONS : Vitesse et accélération d'un point matériel.

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{OM}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \quad \text{et} \quad \vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} \right|_{\mathcal{R}}$$

REMARQUE : Attention, un vecteur est connu par rapport à une base, donc un référentiel. Il est **dérivé par rapport à un référentiel**, ce que l'on doit toujours **préciser explicitement**, au moins une fois et dès qu'on change de référentiel.

PROPRIÉTÉ : Soit $\vec{u}$ un vecteur de **norme constante** et de direction variable paramétré par ν (t , ou θ , ou $s...$) :

$$\vec{u} \cdot \left. \frac{d\vec{u}}{d\nu} \right|_{\mathcal{R}} = 0 \quad \text{donc} \quad \left. \frac{d\vec{u}}{d\nu} \right|_{\mathcal{R}} \perp \vec{u}.$$

Démonstration : $0 = \frac{d}{d\nu} (\vec{u} \cdot \vec{u}) = 2\vec{u} \cdot \left. \frac{d\vec{u}}{d\nu} \right|_{\mathcal{R}}$

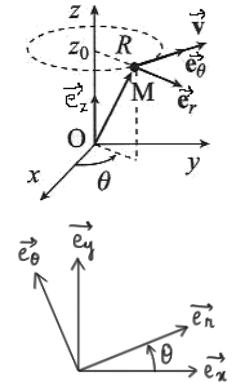
b. Vecteur rotation

- Soit un mouvement circulaire de rayon R , d'axe Oz supposé, en cylindriques.

$$\vec{OM} = R\vec{e}_r + z_0\vec{e}_z \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \vec{e}_r = \cos\theta \vec{e}_x + \sin\theta \vec{e}_y \\ \vec{e}_\theta = -\sin\theta \vec{e}_x + \cos\theta \vec{e}_y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left. \frac{d\vec{e}_r}{d\theta} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \left. \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} \right|_{\mathcal{R}} = -\vec{e}_r.$$

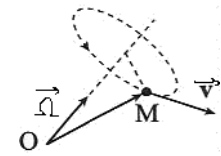
$$\Rightarrow \boxed{\vec{v} = R\dot{\theta} \vec{e}_\theta} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{a} = -R\dot{\theta}^2 \vec{e}_r + R\ddot{\theta} \vec{e}_\theta}.$$



REMARQUE : On peut écrire $\vec{v} = \vec{\Omega} \wedge \vec{OM}$ en posant $\vec{\Omega} = \dot{\theta} \vec{e}_z$.

PROPRIÉTÉ : Pour un mouvement circulaire quelconque d'axe $(O, \vec{k})$ (**axe passant par O**), le vecteur $\vec{OM}$ est de **norme constante**^a et on peut définir un **vecteur rotation** $\vec{\Omega} = \omega \vec{k}$ tel que

$$\vec{v} = \left. \frac{d\vec{OM}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega} \wedge \vec{OM} \quad (\perp \vec{OM})$$



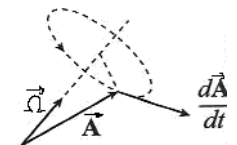
- $\|\vec{\Omega}\|$ est la **vitesse angulaire** absolue (angle balayé par u. de tps) ;
- la **direction** de $\vec{\Omega}$ est celle de l'**axe** du cercle (ici $\vec{k}$) ;
- le sens de $\vec{\Omega}$ est tq la **rotation se fait dans le sens direct** autour de $\vec{\Omega}$.

a. ici on avait $\|\vec{OM}\| = \sqrt{R^2 + z_0^2}$.

REMARQUE : Plus généralement dès lors que $\|\vec{OM}\| = \text{cte}$ cette relation est vraie, mais $\vec{\Omega}$ n'est alors pas nécessairement constant, ni en norme ni en direction...

DÉFINITION : Mouvement de précession

Un vecteur $\vec{A}(t)$ de norme constante, d'origine fixe en O est en mouvement de précession autour d'un axe $(O, \vec{k})$ s'il décrit un cône centré sur cet axe.



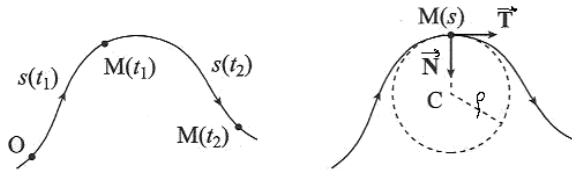
PROPRIÉTÉ : Un mouvement de précession autour d'un axe $(O, \vec{k})$ est caractérisé par un vecteur rotation $\vec{\Omega}$ tel que

$$\left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega} \wedge \vec{A} \quad (\perp \vec{A})$$

Démonstration : Son extrémité décrit un mvt circulaire de même axe.

c. Application : base de Frenet ou base « intrinsèque »

DÉFINITION : **Base de Frenet** ou base **intrinsèque**, pour une trajectoire $\mathcal{T}$ donnée.



- **Abscisse curviligne** $s(t)$ = distance curviligne algébrique parcourue depuis un point de référence O , positive si M après O , négative sinon.
- $\vec{T} \stackrel{\text{def}}{=}$ vect. **unitaire tangent** à la trajectoire dans le sens du mouvement.
- $\vec{N} \stackrel{\text{def}}{=}$ vect. **unitaire colinéaire** à $\left. \frac{d\vec{T}}{dt} \right|_{\mathcal{R}}$ et de même sens, nécessairement $\perp \vec{T}$ car unitaire.
- $\vec{K} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{T} \wedge \vec{N}$, formant un **trièdre direct**.
- Dans le plan du mouvement on définit le *cercle osculateur*, meilleure approximation circulaire de la trajectoire en $M(t)$, de centre $C(t)$ et de rayon $\rho(t)$ = **rayon de courbure** (local).

PROPRIÉTÉ : $\vec{N}$ est toujours tourné vers la concavité et donc $\vec{N} = \frac{\vec{MC}}{MC}$.

Attention : ces 3 vecteurs (ainsi que C et ρ) évoluent a priori au cours du temps au cours du déplacement de M (sauf mouvement rectiligne).

PROPRIÉTÉS : Formes **intrinsèques** dans la base de Frenet

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \dot{s} \vec{T} = v \vec{T} \quad \text{et} \quad \vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \ddot{s} \vec{T} + \frac{\dot{s}^2}{\rho} \vec{N} = \dot{v} \vec{T} + \frac{v^2}{\rho} \vec{N}$$

Démonstration :

→ $\dot{s} > 0$ par définition de $s(t)$, et $v = ||\vec{v}|| = \dot{s}$. Donc par définition de $\vec{T}$ on a $\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = v \vec{T} = \dot{s} \vec{T}$.

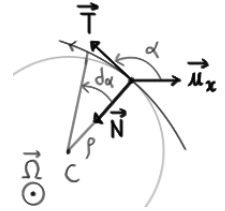
→ $\vec{a} = \left. \frac{d}{dt} (\dot{s} \vec{T}) \right|_{\mathcal{R}} = \ddot{s} \vec{T} + \dot{s} \left. \frac{d\vec{T}}{dt} \right|_{\mathcal{R}}$.

→ $\vec{T}$ tourne dans le plan du cercle osculateur.

On définit l'angle $\alpha = (\vec{u}_x, \vec{T})$ avec $\vec{u}_x$ choisi dans ce plan tel que $\dot{\alpha} > 0$.

Le vecteur $\vec{T}$ a donc un mouvement de précession de vecteur rotation instantané $\vec{\Omega} = \dot{\alpha} \vec{K}$ et donc

$$\left. \frac{d\vec{T}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega} \wedge \vec{T} = \dot{\alpha} \vec{N}.$$



→ Sur l'arc de cercle (osculateur) $ds = \rho d\alpha$ ou $\dot{s} = \rho \dot{\alpha}$, donc $\left. \frac{d\vec{T}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \frac{\dot{s}}{\rho} \vec{N}$.

APPLICATION : L'accélération permet de trouver l'expression du rayon de courbure ρ si on sait construire la base de Frenet à partir d'un autre système de coordonnées donné.¹

II.2. Composition des mouvements

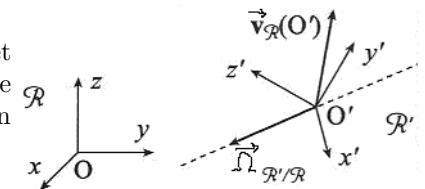
a. Mouvement d'un référentiel par rapport à un autre

→ Problématique : le mouvement perçu **dépend du référentiel**. Il peut être simple ou complexe. Utiliser plusieurs référentiels peut permettre de le décomposer en mouvements simples.

Exemple : Différents points d'un vélo, pour différents observateurs.



→ Soient 2 référentiels $\mathcal{R}(Oxyz)$ et $\mathcal{R}'(O'x'y'z')$ en mouvement relatif. Dans le cas général, le mouvement se décompose en une **translation** et une **rotation**.

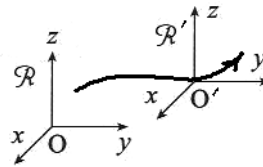


1. Partir du vecteur vitesse $\vec{T} = \vec{v}/v$ puis on calcule $\vec{N} = \pm \left. \frac{d\vec{T}}{d\alpha} \right|_{\mathcal{R}}$ dans le plan local

du mouvement à l'aide d'un angle $\alpha = (\vec{u}_x, \vec{T})$ relatif à un vecteur fixe $\vec{u}_x$ dans ce plan, ou simplement par orthogonalité. Finalement $\frac{v^2}{\rho} = \vec{a} \cdot \vec{N}$ d'où ρ .

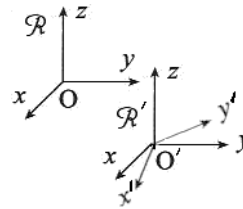
DÉFINITIONS :

- $\mathcal{R}'$ est en **translation** par rapport à $\mathcal{R}$
 $\Leftrightarrow$ tous les points fixes dans $\mathcal{R}'$ ont même vitesse dans $\mathcal{R}$
 $\Leftrightarrow$ tout axe/vecteur fixe dans $\mathcal{R}'$ garde une direction fixe dans $\mathcal{R}$.



REMARQUE : La nature de la translation est caractérisée par le mouvement d'un point de référence, par exemple $\vec{v}_{O'/\mathcal{R}}$: translation rectiligne, circulaire, quelconque...

- $\mathcal{R}'$ est en **rotation** par rapport à $\mathcal{R}$ autour du point O'
 $\Leftrightarrow$ Il existe un vecteur rotation $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ tel que tous les points fixes de $\mathcal{R}'$ sont en mouvement circulaire avec le même vecteur rotation $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ et le même axe ($O', \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$) dans $\mathcal{R}$ (donc avec la même vitesse angulaire pour tous les points).

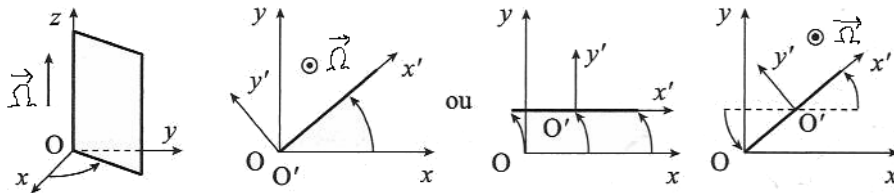


a. C'est le même objet qu'un vecteur rotation d'un solide par rapport à un autre.

REMARQUES :

- Les caractéristiques ($\vec{v}_{O'/\mathcal{R}}, \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$) de ce mouvement relatif sont **instantanées** ; elles peuvent dépendre du temps.
- La décomposition entre translation et rotation n'est **pas unique**.

Exemple : Le cas d'une porte... il y a un choix plus simple que l'autre (même $\vec{\Omega}$).



REMARQUE : Toutefois le programme nous limitera aux cas simples de Translation pure ou Rotation pure.

b. Dérivation temporelle d'un vecteur

→ Soit un vecteur $\vec{A}$ observé dans 2 référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$:

$$\vec{A} = A_x \vec{u}_x + A_y \vec{u}_y + A_z \vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{A} = A'_x \vec{u}'_x + A'_y \vec{u}'_y + A'_z \vec{u}'_z$$

→ Dans un référentiel où la base est fixe, on dérive juste les composantes :

$$\left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \dot{A}_x \vec{u}_x + \dot{A}_y \vec{u}_y + \dot{A}_z \vec{u}_z \quad \text{et} \quad \left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} = \dot{A}'_x \vec{u}'_x + \dot{A}'_y \vec{u}'_y + \dot{A}'_z \vec{u}'_z$$

QUESTION : Quelle relation entre ces deux dérivées ?

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} &= \frac{d}{dt} (A'_x \vec{u}'_x + A'_y \vec{u}'_y + A'_z \vec{u}'_z) \Big|_{\mathcal{R}} \\ &= \underbrace{\dot{A}'_x \vec{u}'_x + \dot{A}'_y \vec{u}'_y + \dot{A}'_z \vec{u}'_z}_{\left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'}} + \left(A'_x \left. \frac{d\vec{u}'_x}{dt} \right|_{\mathcal{R}} + A'_y \left. \frac{d\vec{u}'_y}{dt} \right|_{\mathcal{R}} + A'_z \left. \frac{d\vec{u}'_z}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \right) \end{aligned}$$

- Soit il n'y a **pas de rotation** (Translation pure), alors par définition chaque base est fixe dans les 2 référentiels, donc pas de différence entre les dérivées.
- Soit il y a de la rotation, alors chaque vecteur de base a un mouvement de précession de même vecteur $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$, et ainsi

SCHEMA

$$\left. \frac{d\vec{u}'_i}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{u}'_i \quad (i = x, y, z)$$

PROPRIÉTÉ : Formule de changement de référentiel (ou *Formule de Bour*) :

$$\left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{A}$$

COROLLAIRE : lorsque deux référentiels sont en **translation** l'un par rapport à l'autre, il est **équivalent** de dériver par rapport à l'un ou l'autre.

c. Composition des vitesses angulaires

PROPRIÉTÉ : Soient 3 référentiels $\mathcal{R}_0$, $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$, les vecteurs rotation relatifs sont additifs² :

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_0} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0}$$

Démonstration : Considérons un vecteur $\vec{A}$ fixe dans $\mathcal{R}_2$:

$$\left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} = \vec{0} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_0} \wedge \vec{A} \quad \text{et} \quad \left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_1} = \vec{0} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \vec{A} \quad \text{d'où}$$

$$\left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} = \left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0} \wedge \vec{A} \quad \text{donc} \quad \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_0} \wedge \vec{A} = \left(\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0} \right) \wedge \vec{A}$$

Vrai pour tout $\vec{A}$ donc $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_0} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0}$

2. comme pour une relation de Chasles...