

Intégration et lectures de données

Lorsque l'on doit calculer une intégrale dans un contexte de calcul scientifique, on est rarement en situation de connaître une primitive de la fonction à intégrer. Le plus souvent, la fonction n'est connue que sur un ensemble discret de points. On doit alors calculer l'intégrale de façon approximative, en utilisant une méthode dite « de quadrature », en minimisant l'erreur avec un coût en calcul raisonnable. Nous verrons ici les méthodes de quadrature les plus simples, reposant sur des interpolations simples de la série de points considérée.

En tant qu'exemple d'application on travaillera à partir d'un jeu de données expérimentales tirées d'un radiosondage météorologique. On se propose de vérifier que l'hypothèse hydrostatique est pertinente pour rendre compte du profil vertical de pression.

I. Intégration numérique

L'intégration numérique consiste à intégrer de façon approchée une fonction f sur un intervalle borné $[a, b]$, c'est-à-dire calculer l'aire sous la courbe représentant la fonction, à partir d'un **calcul ou d'une mesure en un nombre fini de points**. On choisit une **subdivision de l'intervalle** en n sous-intervalles :

$$a = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n = b$$

de l'intervalle $[a, b]$. La relation de Chasles donne

$$I = \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(x) dx$$

On est donc ramené au problème d'évaluer l'intégrale de f sur un petit intervalle $[\alpha_i; \alpha_{i+1}]$. Ce calcul est effectué au moyen de formules approchées sur chacun des intervalles $[\alpha_i; \alpha_{i+1}]$, appelées *méthodes de quadrature élémentaires*.

Nous présentons ici les méthodes les plus simples. Pour chacune d'elle, on précisera à chaque fois l'ordre p et l'erreur $E(f)$ due à l'approximation¹. En pratique pour ces méthodes, si l'ordre est p , cela implique que

$$E(f) = O(h^{p+1}),$$

1. Il s'agit de la différence entre la valeur exacte et la valeur approchée de l'intégrale.

où $h = \alpha_{i+1} - \alpha_i$ est le *pas d'échantillonnage* constant. Ainsi, la précision de l'intégration numérique s'améliore en diminuant le pas h , c'est-à-dire en augmentant le nombre de points n .

I.1. Méthodes des rectangles

La fonction est **approximée par une constante** sur chaque intervalle, ce qui nous ramène à une somme de Riemann :

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) f(x_i)$$

Selon la position du point x_i , on obtient alors les trois variantes suivantes, illustrées en Figs. 1 à 3 dans le cas d'un pas constant $h = \alpha_{i+1} - \alpha_i$:

Méthode des rectangles à gauche (à droite) : $x_i = \alpha_i$ (resp. $x_i = \alpha_{i+1}$).

Ces méthodes sont **d'ordre 0**.

Méthode du point milieu : $x_i = (\alpha_i + \alpha_{i+1})/2$.

Cette méthode est en général plus intéressante car elle est **d'ordre 1**.

Erreur : on peut montrer que

$$\exists \xi \in [a, b] \text{ tel que } E(f) = \frac{1}{24} h^2 f''(\xi) (b - a)$$

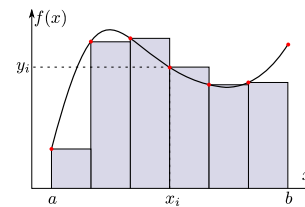


FIGURE 1 – Méthode des rectangles à gauche.

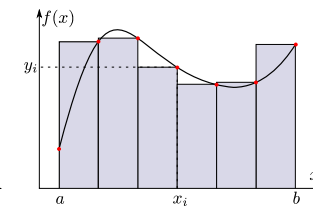


FIGURE 2 – Méthode des rectangles à droite.

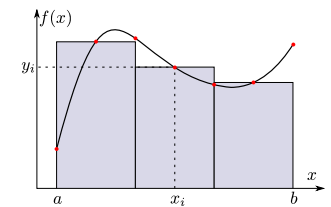


FIGURE 3 – Méthode du point milieu.

I.2. Méthode des trapèzes

La méthode des trapèzes s'appuie sur une **interpolation linéaire** entre les deux bornes de chaque sous-intervalle $[\alpha_i; \alpha_{i+1}]$. La valeur approchée de l'intégrale s'écrit alors en faisant apparaître l'aire du trapèze, comme illustré en Fig. 10

pour un pas constant $h = \alpha_{i+1} - \alpha_i$:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) \frac{f(\alpha_i) + f(\alpha_{i+1})}{2}$$

Cette méthode est d'**ordre 1**, ce que l'on peut intuitiver par le fait qu'elle ne diffère pas beaucoup de la méthode du point milieu (cf l'aire du rectangle associé au trapèze...).

Erreur : pour un pas constant $h = \alpha_{i+1} - \alpha_i$

$$\exists \xi \in [a, b] \text{ tel que } E(f) = -\frac{1}{12} h^2 f''(\xi) (b - a)$$

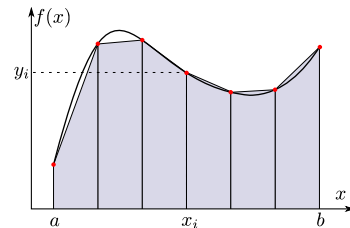


Figure 10 – Intégration par la méthode des trapèzes ($x_i = \alpha_i$).

I.3. Méthode de Simpson

La méthode de Simpson s'appuie sur une **interpolation quadratique sur trois points équidistants**, distants de $\frac{h}{2} = (\alpha_{i+1} - \alpha_i)/2$. on obtient dans le cas d'un pas h uniforme :

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{6} (f(\alpha_i) + 4f((\alpha_i + \alpha_{i+1})/2) + f(\alpha_{i+1}))$$

Cette méthode est d'**ordre 3**. Son **erreur** vérifie

$$\exists \xi \in [a, b] \text{ tel que } E(f) = -\frac{1}{46080} h^4 f^{(4)}(\xi) (b - a)$$

L'interpolation de Simpson est plus précise que l'interpolation trapèze lorsque la fonction à intégrer est raisonnablement continue. Elle se justifie beaucoup moins lorsque la fonction présente des discontinuités. Lors d'une intégration "temps réel", elle introduit par ailleurs un décalage temporel (ou spatial) de h qui est souvent plus pénalisant que l'erreur d'intégration.

II. Étude de la pression hydrostatique à partir d'un radiosondage

Chaque jour un ou deux ballon-sondes sont lâchés dans certaines stations météorologiques dans le but de réaliser des profils verticaux des principales variables météorologiques (pression, température, humidité, vent...).

II.1. Importation des données

On commence par télécharger un fichier .csv (tableau au format texte) de radiosondage sur le site de météoFrance² (Station de Trappes, date du lancé 01/11/2021 à 12h),

Radio sondage_Trappes_20211102_12h_tab.csv

dont le début a l'allure suivante lorsqu'on l'ouvre avec un éditeur de texte :

num_stn	date	nb_niv				
7145	2021110211536	3315				
p_niv	altitude	t	td	dd	ff	
98150	168.000000	283.650000		272.240000		194 5.800000
98100	173.000000	285.110000		274.100000		195 5.800000
98040	177.000000	286.580000		275.950000		196 5.800000
97990	182.000000	284.670000		277.970000		196 5.900000
97930	187.000000	281.960000		278.590000		198 6.100000
97880	191.000000	281.920000		278.710000		200 6.200000

Chaque colonne est séparée de la suivante par une tabulation (autres possibilités : , ou ; ou l'espace). Après lecture de la documentation, on comprend que ce radiosondage comporte de $\text{nb_niv}=3315$ niveaux verticaux de mesure, et les grandeurs enregistrées sont dans l'ordre : la pression, l'altitude, la température, la température du point de rosée, la direction du vent, et la force du vent.

On commence par importer ces données sous Python sous la forme d'un grand tableau Numpy (**array**), en prenant soin de vérifier que le chemin d'accès au fichier est correct (cf le dossier courant de travail, `cwd`, via le module `os` si nécessaire).

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

file = 'Radio sondage_Trappes_20211102_12h_tab.csv'
radiosondage = np.loadtxt(file, delimiter='\t', skiprows=3) # ici
on n'importe pas les 3 premières lignes (étiquettes), séparateur tabulation
nb_niv = np.shape(radiosondage)[0] # nombre de niveaux verticaux
```

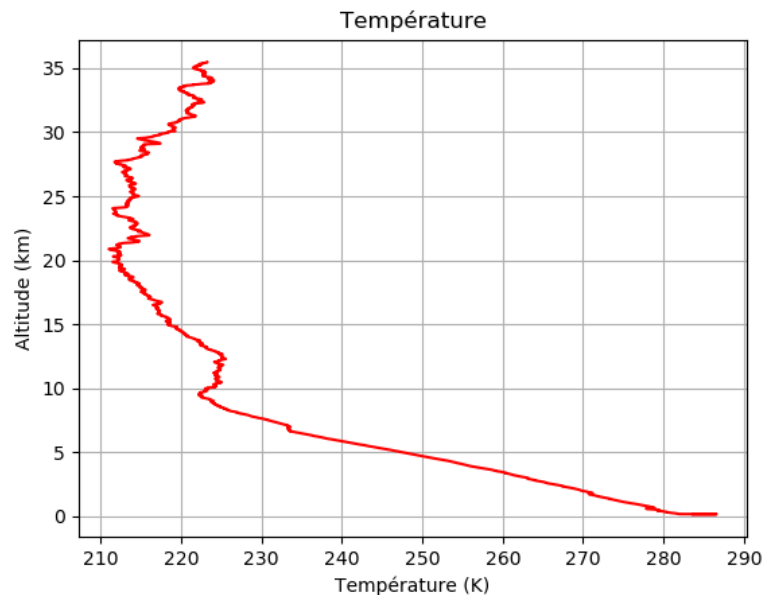
2. <https://donneespubliques.meteofrance.fr>

On ne travaillera que sur les 3 premières variables, que l'on extrait du tableau global.

```
P = radiosondage[:,0] # pression mesurée (Pa)
z = radiosondage[:,1] # altitude mesurée (m)
T = radiosondage[:,2] # température mesurée (K)
```

Puis on trace le profil vertical de température, pour vérification :

```
plt.plot(T,z/1000,'r-')
plt.title('Temperature')
plt.xlabel('Temperature (K)')
plt.ylabel('Altitude (km)')
plt.grid()
plt.show()
```



II.2. Profil de pression hydrostatique

On souhaite vérifier la pertinence du modèle hydrostatique du champ de pression $P(z)$ vertical³, c'est-à-dire celui qui repose sur une hypothèse d'équilibre

3. cf Partie Thermodynamique du programme.

statique de l'air atmosphérique (effet des mouvements négligés). En modélisant l'air comme un gaz parfait de masse molaire M et de température absolue $T(z)$ dans le champ de pesanteur supposé uniforme g , cette équation s'écrit

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{Mg}{RT(z)} P(z) \Leftrightarrow \frac{d \ln P}{dz} = -\frac{Mg}{RT(z)}$$

en considérant un axe des altitudes z ascendant. On intègre cette relation entre la surface z_0 et une altitude z quelconque, ce qui donne

$$P(z) = P(z_0) \exp\left(-\int_{z_0}^z \frac{Mg}{RT(z')} dz'\right).$$

Cette expression va être évaluée à partir des données de $T(z)$ (variable Phyd) puis sera comparée aux valeurs de pression fournies par le radiosondage (P). On utilise pour cela la méthode des rectangles à gauche, qui ici est à pas variable car l'intervalle d'altitude n'est pas constant. Cela donne des valeurs de pression P_n au niveau n ($n \in [0, np_niv]$) calculées via

$$P_n = P_0 \exp\left(-\frac{Mg}{R} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{z_{k+1} - z_k}{T(z_k)}\right)$$

Notons aussi que sous l'hypothèse d'une température uniforme dans l'atmosphère (modèle dit *isotherme*), notée T_{moy} , l'expression ci-dessus conduit à l'expression simple suivante :

$$P(z) = P(z_0) \exp\left(-\frac{Mg(z - z_0)}{RT_{moy}}\right).$$

On notera `Piso` cette 3ème pression dans le programme. Les calculs sont présentés ci-dessous :

```
M = 29e-3 # kg.mol-1 masse molaire de l'air
g = 9.81 # m.s-2 champ de pesanteur à Paris
R = 8.314 # J.K-1.mol-1 constante des gaz parfaits
```

```
# CALCUL DE LA PRESSION HYDROSTATIQUE RÉELLE
```

```
Phyd = np.ones(nb_niv) # création du tableau des pressions (rempli de 1)
Phyd[0] = P[0] # pression de surface
# Intégration par la méthode des rectangles à gauche, à pas variable...
S = 0 # initialisation de la somme
for k in range(nb_niv-1):
    S = S + (z[k+1] - z[k]) / T[k]
    Phyd[k+1] = Phyd[0] * np.exp(-M*g/R * S)
```

```
# CALCUL DE LA PRESSION HYDROSTATIQUE ISOTHERME
Tmoy = T[0] # Température supposée uniforme = température de surface
Piso = P[0] * np.exp( -M*g/R/Tmoy * (z-z[0]) )
```

On termine en traçant le graphe des 3 pressions en couleurs différentes.

```
plt.plot(Phyd,z/1000,'r-',label='Calculée')
plt.plot(P,z/1000,'k-',label='Donnée (radiosondage)')
plt.plot(Piso,z/1000,'g-',label='Isotherme')
plt.title('Pression hydrostatique')
plt.xlabel('Pression (Pa)')
plt.ylabel('Altitude (km)')
plt.legend(loc='upper right')
plt.grid()
plt.show()
```

On constate que la pression fournie par le radiosondage est indiscernable de celle que nous avons calculée sous l'hypothèse hydrostatique. Quant à la pression sous le modèle isotherme, elle représente très bien la pression réelle dans les basses couches de l'atmosphère, et la sur-estime légèrement dans les hautes.

