

Electrocinétique - TP n°2 Régimes transitoires

A. MARTIN

1 / 15

Etude d'un dipôle RC série
Régime libre
Réponse à un signal créneau

Etude du dipôle RLC série
Différents régimes
Régime pseudo-périodique
Analyse de $i(t)$ et $\frac{di(t)}{dt}$
Portrait de phase du condensateur

2 / 15

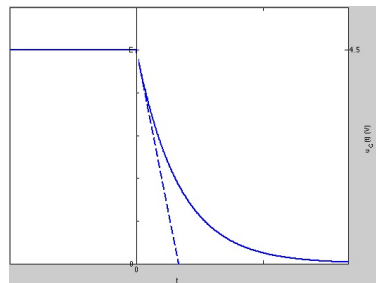
Décharge d'un condensateur dans une résistance

1. Le condensateur est initialement chargé (k fermé en 1) : $u_C(t < 0) = E$. Par continuité, on aura $u_C(t = 0^+) = E$.
2. Lorsque k est fermé en 2, on est en régime libre. La loi des mailles donne (avec $\tau = RC$) :

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{\tau} u_C = 0$$

3. Cette équation a pour solution :

$$u_C(t) = Ae^{-t/\tau} = Ee^{-t/\tau}$$



3 / 15

Estimation de l'incertitude $\Delta\tau$

- ▶ Mesure par la tangente à l'origine
 - ▶ La principale incertitude vient de la détermination de la tangente et de son tracé.
 - ▶ On trace 2 droites apparemment extrêmes et on en déduit les τ extrêmes pour avoir $\Delta\tau$.
- ▶ Mesure par la valeur à $t = \tau$
 - ▶ Il y a alors deux incertitudes : celle sur la mesure de 37% de E et celle sur la mesure du temps pour lequel on atteint la valeur 37% de E. Les deux étant corrélées, on mesurera la seconde qui suffira à déterminer l'incertitude $\Delta\tau$.
 - ▶ Estimation de l'incertitude : c'est la somme d'une incertitude de lecture et d'une incertitude de construction (comme pour le multimètre). L'incertitude de lecture est de l'ordre de 1/10ème de division (multiplié par le calibre). L'incertitude "constructeur" correspond à 3% de la plage totale de l'écran, qui dépend aussi du calibre (cf documentation oscillo). Au total, l'incertitude est donc de 4% de la plage totale de l'écran.

Exemple : Calibre $0,5 \text{ms} \cdot \text{div}^{-1}$: $\Delta\tau = \frac{4}{100} \times 10 \times 0,5 \text{ms} \cdot \text{div}^{-1} = 0,2 \text{ms}$

Remarque : on peut minimiser ces valeurs en choisissant des calibres où la courbe occupe une grande partie de l'écran

4 / 15

MANIPULATION 1

Mesure d'une résistance - Incertitude.

- On suppose que C est connu avec une très grande précision. Posons $R = \frac{\tau}{C} = f(\tau)$. Pour savoir comment l'erreur $\delta\tau$ faite sur τ se transmet sur R (δR), on calcule la dérivée :

$$\frac{\delta R}{R} \approx \frac{dR}{d\tau} = f'(\tau) = \frac{1}{C} \quad \text{d'où} \quad \delta R = \frac{\delta\tau}{C}$$

En terme d'incertitude et d'incertitude relative, cela se traduit par

$$\Delta R = \frac{\Delta\tau}{C} \quad \text{et} \quad \frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta\tau}{\tau}$$

On voit que comme R et τ sont proportionnels, les incertitudes le sont aussi. Mais la méthode se généralise pour des relations $f(\tau)$ plus complexes.

- Si l'on souhaite prendre en compte l'incertitude sur C , on généralise la méthode à une fonction à plusieurs variables (cf cours sur ce thème). On obtient alors ici la formule suivante :

$$\frac{\Delta R}{R} = \sqrt{\left(\frac{\Delta\tau}{\tau}\right)^2 + \left(\frac{\Delta C}{C}\right)^2}$$

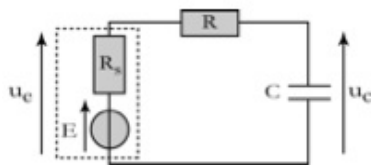
L'incertitude **relative** de R est donc la somme des incertitudes **relatives** de τ et de C .

Remarque : Cette relation est valable pour un quotient ($\frac{\tau}{C}$) ou pour un produit (τC).

5 / 15

Effet de la charge

Déformation du signal pour les faibles valeurs de R (avec RC inchangé) : La résistance interne du G.B.F. ($R_S = 50\Omega$) n'est plus négligeable devant la résistance $R = 400\Omega$.



MANIPULATION 4

⇒ modification du temps caractéristique τ et donc de $u_C(t)$

$$u_C(t) = E(1 - e^{-t/\tau}) \quad \text{avec} \quad \tau = (R + R_S)C \neq RC$$

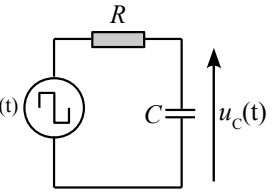
⇒ chute de tension u_e du signal délivré par le GBF

$$u_e(t) = E \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{R}{R_S}} e^{-t/\tau}\right) \quad \text{avec} \quad \tau = (R + R_S)C \neq RC$$

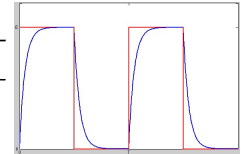
7 / 15

Temps caractéristique

- Charges et décharges successives du condensateur. Même temps caractéristique $\tau = RC$ pour la charge et la décharge.



$\tau = RC = 4.10^3 \times 0,1.10^{-6} = 0,4\text{ms} \ll T$
On observe des charges et décharges complètes.



- Temps de montée à 90%

$$u_C(t_{90\%}) = \frac{90}{100} E \Rightarrow t_{90\%} = \tau \ln(10) \Rightarrow \tau = \frac{t_{90\%}}{\ln(10)} \approx \frac{t_{90\%}}{2,3}$$

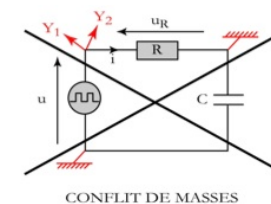
La mesure de $t_{90\%}$ permet une mesure du temps de relaxation τ

MANIPULATION 3

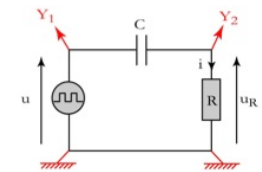
6 / 15

Etude de l'intensité

- ATTENTION** aux masses quand on mesure l'intensité



CONFLIT DE MASSES



MANIPULATION 5

- Discontinuité de $i(t)$

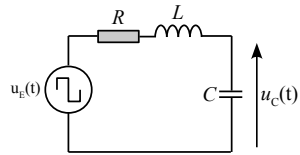
Contrairement à la tension aux bornes du condensateur, l'intensité $i(t)$ qui le traverse est discontinue :

$$i(t = 0^-) = 0$$

$$i(t = 0^+) = \frac{E}{R}$$

8 / 15

Différents régimes



$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 u_e$$

Equation caractéristique : $r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2$ et $\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} (1 - 4Q^2)$

- ▶ $Q < 1/2$; $\Delta > 0 \Rightarrow$ **régime apériodique.**
- ▶ $Q = 1/2$; $\Delta = 0 \Rightarrow$ **régime critique.**
Pour cette valeur, on est à la limite des oscillations.

$$R_C = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

- ▶ $Q > 1/2$; $\Delta < 0 \Rightarrow$ **régime amorti ou pseudo-périodique.**
 - ▶ La réponse oscille en s'atténuant exponentiellement.
 - ▶ On obtient $Q > 1/2$ à L et C fixé en prenant R suffisamment faible.

MANIPULATION 6

Régime pseudo-périodique - Pulsation propre

Régime pseudo-périodique : $Q > Q_C = 1/2$

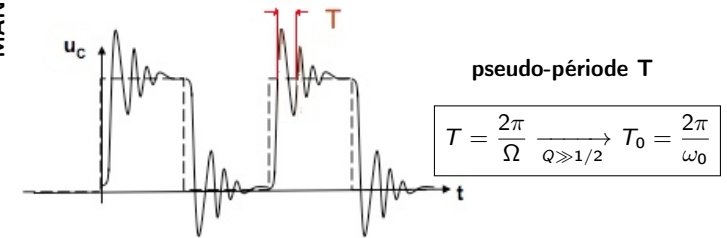
$$\Rightarrow R < R_C \text{ (moins de dissipation d'énergie) car } Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \propto \frac{1}{R}$$

- ▶ L'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées

$$r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm i\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = -\frac{1}{\tau} \pm i\Omega \quad \boxed{\Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

- ▶ Le régime transitoire a alors la forme (quand $u_e(t) = E$) :

$$\boxed{u_C(t) = Ae^{-t/\tau} \cos(\Omega t + \phi) + E}$$



MANIPULATION 7

Régime pseudo-périodique - Décrément logarithmique

- ▶ Décrément logarithmique : $\delta = \ln\left(\frac{u_{CH}(t_m)}{u_{CH}(t_m + T)}\right)$
Si Q est suffisamment grand, δ est indépendant du max t_m :

$$\delta = \frac{1}{n-1} \ln\left(\frac{u_{CH \max}(1)}{u_{CH \max}(n)}\right)$$

$$\Rightarrow (n-1)\delta = \ln(u_{CH \max}(1)) - \ln(u_{CH \max}(n))$$

$$\Rightarrow \ln(u_{CH \max}(n)) = \ln(u_{CH \max}(1)) - (n-1)\delta$$

La courbe $\ln(u_{CH \max}(n)) = f(n)$ est alors une droite de pente $-\delta$.

- ▶ Facteur de qualité Q : obtenu grâce à la mesure de δ si Q est suffisamment grand :

$$\delta = \ln\left(\frac{u_{CH}(t_m)}{u_{CH}(t_m + T)}\right) \Rightarrow \boxed{\delta \approx \frac{\omega_0 T}{2Q} \xrightarrow{Q \gg 1/2} \frac{\pi}{Q}}$$

MANIPULATION 8

Analyse de l'intensité et de sa dérivée.

- ▶ $i(t)$ se visualise en mesurant la tension aux bornes de la résistance



On mesure $Ri(t)$ et non $i(t)$ directement. Attention aux masses.

- ▶ $\frac{di(t)}{dt}$ se visualise en mesurant la tension aux bornes de la bobine



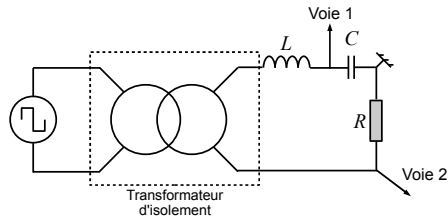
On mesure $L \frac{di(t)}{dt}$ et non $\frac{di(t)}{dt}$ directement. Attention aux masses.

MANIPULATION 9

Tracé du portrait de phase à l'oscilloscope

1. A l'oscilloscope, on est confronté à un problème de masse. On isole donc la masse du générateur avec **un transformateur d'isolement**.

MANIPULATION 10



Remarque : Un transformateur dissipe d'autant plus d'énergie que la fréquence est élevée. Il est donc préférable de ne l'utiliser que quand on n'a pas d'autre choix.

2. Sur GENERIS (facultatif), il n'y a pas de problème de masse (bornes à masse flottante).

13 / 15

Portrait de phase en régime aperiodique

Tracé de $i(t)$ l'intensité qui le traverse en fonction de $u_C(t)$.
 r_1 et r_2 étant les solutions de l'équation caractéristique quand $\Delta > 0$, on montre que (**exercice**) :

$$u(t) = E \left(1 + \frac{r_2}{r_1 - r_2} e^{r_1 t} - \frac{r_1}{r_1 - r_2} e^{r_2 t} \right)$$

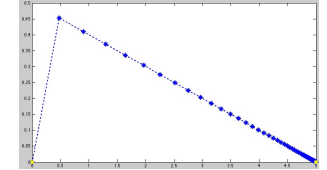
$$i(t) = CE \frac{r_2 r_1}{r_1 - r_2} (e^{r_1 t} - e^{r_2 t})$$

Quand Q est très faible (R très grand, régime très amorti), on peut simplifier les formules ci-dessus pour t un peu supérieur à 0 : on a $|r_2| \gg |r_1| \approx 0$:

$$u(t) = E(1 - e^{r_1 t})$$

$$i(t) = -CEr_1(e^{r_1 t})$$

On observe donc qu'à fort amortissement, $i(t)$ et $u(t)$ varient de façon proportionnelle après un certain temps t_L (sur la figure $t_L < 0.00001s$).



$$i(t) = CEr_1 - Cr_1 u(t).$$

14 / 15

Portrait de phase en régime pseudo-périodique

Tracé de $i(t)$ l'intensité qui le traverse en fonction de $u_C(t)$.
On montre que (**exercice**) :

$$u(t) = E \left(1 - \frac{1}{\cos \phi} \cos(\Omega t + \phi) e^{-t/\tau} \right) \quad \text{avec} \quad \tan \phi = -\frac{1}{\tau \Omega}$$

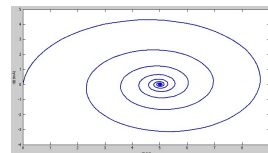
$$i(t) = CE \Omega \left(1 + \frac{1}{\tau^2 \Omega^2} \right) \sin(\Omega t) e^{-t/\tau} \quad \text{donc} \quad -\frac{\pi}{2} < \phi < 0$$

On montre que la courbe i en fonction de u_C est une spirale elliptique inclinée. En particulier, quand Q est très grand, on peut simplifier les formules ci-dessus car $\tan \phi \approx \frac{1}{2Q}$ et donc $\tan \phi \approx 0$:

$$u(t) \approx E(1 - \cos(\omega_0 t) e^{-t/\tau}) \quad \text{et} \quad i(t) \approx CE \omega_0 \sin(\omega_0 t) e^{-t/\tau}$$

ce qui mène à

$$(E - u(t))^2 + \frac{i^2(t)}{C^2 \omega_0^2} \approx E^2 e^{-2t/\tau}$$



L'équation d'une spirale elliptique droite.

15 / 15