Oscillations libres d'un pendule

On prendra soin de reporter dans le compte-rendu :
courbes visualisées, mesures et leur incertitude, commentaires et interprétations.

Objectifs :

Il s'agit d'effectuer une étude approfondie des oscillations mécaniques d'un pendule en régime libre, sans frottement ou avec frottement fluide ou solide. Ce TP sera notamment l'occasion de :

— tester si le modèle de pendule simple (masse ponctuelle au bout d'une tige sans masse) s'applique au pendule réel étudié ;

— étudier la dépendance de la période en fonction de l'amplitude des oscillations (éventuels effets nonlinéaires) ;

— caractériser l'effet de différents amortissements (fluide et solide) ;

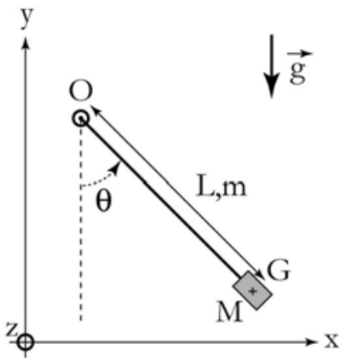
— obtenir le tracé de trajectoires dans l'espace des phases (portrait de phase).

N.B. : Vous joindrez au compte-rendu toutes les impressions des acquisitions et graphiques que vous jugerez nécessaires à l'éclaircissement et à la bonne compréhension du compte-rendu.

I. Dispositif expérimental

I.1. Le pendule

Le pendule utilisé est constitué d'une masse M non-ponctuelle, fixée à l'extrémité d'une tige métallique de masse m non nulle ("pendule pesant") [a]. Il est libre de tourner autour d'un axe horizontal. La position du centre de gravité G n'est pas connue a priori. On gardera à l'esprit que tout changement dans la répartition des masses du pendule au cours du TP aura une incidence sur la période d'oscillation.

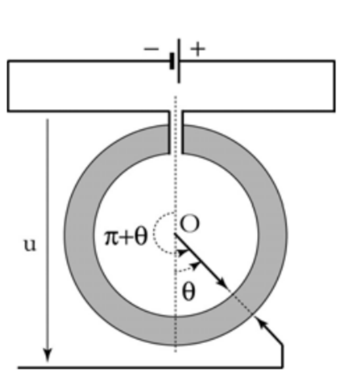


Il est possible d'exercer des *frottements solides* (contact solide-solide) au niveau de l'axe de rotation du pendule, à l'aide d'une vis venant appuyer une lame métallique sur l'axe de rotation. Concernant les *frottements fluides*, ils seront soit appliqués à l'aide d'un bac rempli d'eau, soit à l'aide d'un freinage par courants de Foucault qui conduit au même effet.

a. Sur certains pendules il y a en outre un balourd à l'autre extrémité.

L'état du pendule est entièrement défini par la donnée de $\theta(t)$ (position) et de sa dérivée par rapport au temps $\dot{\theta}(t)$ (vitesse angulaire). Les angles seront repérés à partir de la verticale : $\theta = 0$ correspond à la position la plus basse du pendule. La position $\theta(t)$ sera acquise numériquement grâce à un *potentiomètre annulaire* (cf ci-dessous), dont le curseur est solidaire de la tige du pendule, et qui permet d'obtenir une tension $u(t)$ « linéaire » en $\theta(t)$ (c'est-à-dire dans une relation affine).

La tension $u(t)$ pourra être relevée à l'ordinateur à l'aide d'une carte d'acquisition FOXY et le signal sera alors traité avec le logiciel GENERIS - Atelier Scientifique [a]. Ne pas oublier d'alimenter le potentiomètre avec une tension de 15 ou 30 V, à l'aide des petites alimentations stabilisées fournies [b].



a. Mode opératoire à suivre dans l'ordre : brancher la carte sur l'ordinateur (USB) et l'alimenter, démarrer le logiciel embarqué dans la fenêtre qui s'ouvre alors, puis choisir la version « généraliste », et enfin brancher les 2 fils de mesure issus du potentiomètre sur la voie choisie pour la mesure.

b. Ne pas se fier aux couleurs des bornes, le point de potentiel variable lié au mouvement est au milieu.

On veillera à **sauvegarder régulièrement** les travaux car GENERIS a une fâcheuse tendance à planter...

I.2. Acquisition du mouvement $\theta(t)$ et obtention de sa dérivée $\dot{\theta}(t)$

La masse doit être **bien fixée** sur la tige et **positionnez systématiquement les caches de protection lorsque vous manipulez, si votre pendule en dispose.**.
Aucun frottement ne sera appliqué pour l'instant : on prendra garde à ne pas appliquer de frottement solide sur l'axe de rotation (vis desserrée).

- ***MANIP 1 : De $u(t)$ à $\theta(t)$***
  - Abandonner le pendule à sa position d'équilibre $\theta = 0$ et mesurer, avec le voltmètre intégré dans GENERIS, la tension u correspondante.
  - À l'aide d'une deuxième mesure, déterminer le lien donnant θ à partir de u.

Il est nécessaire de bien choisir le nombre de points d'acquisition lors des relevés, de manière à ce que les variations du signal analogique soient bien reproduites (cf Annexe). Il faudra d'autant plus de points que nous serons amenés à dériver le signal relevé, pour obtenir $\dot{\theta}(t)$.

- ***MANIP 2 : Échantillonnage du signal analogique***
  - Effectuez une acquisition de $u(t)$ sur quelques périodes d'oscillations du pendule, lâché sans vitesse initiale depuis un angle $\theta_{\max}$ d'environ $20°$.
    Indiquez les paramètres d'acquisition choisis (durée, nombre de points, période ou fréquence d'échantillonnage, calibre de sensibilité verticale...).
  - Faire tracer $\theta(t)$ à Généris en indiquant son lien avec $u(t)$ dans la fenêtre de TRAITEMENT DES DONNÉES.

La dérivée $\dot{\theta}(t)$ peut être calculé par GENERIS, toujours à l'aide de la fenêtre de TRAITEMENT DES DONNÉES. Le signal $\theta(t)$ comporte naturellement une part de « bruit » (fluctuations aléatoires plus ou moins rapides d'origine électronique). Or l'**opération de dérivation dégrade le rapport signal sur bruit**, car elle amplifie les hautes fréquences [1], il sera préférable de toujours procéder au lissage de $\theta(t)$ avant sa dérivation.

- ***MANIP 3 : Lissage de $\theta(t)$ et tracé de $\dot{\theta}(t)$***
  - Lissez $\theta(t)$ en l'ajustant par des B-Splines (ajustement par morceaux par des polynômes) de degré modéré (inférieur à 4).
  - Dérivez la fonction lissée pour obtenir $\dot{\theta}(t)$.
  - Tracez avec GENERIS une trajectoire de phase, c'est-à-dire la courbe $\dot{\theta}$ en fonction de θ. Commentez la forme de la courbe obtenue (fermée ou non, symétrie, ...)

II. Pendule sans frottement : période des oscillations

Nous allons ici étudier la dépendance de la période T des oscillations du pendule en fonction de leur amplitude $\theta_{\max}$. Le pendule sera lâché, **sans vitesse initiale**, avec diverses amplitudes.

- ***MANIP 4***
  - Pour des amplitudes $\theta_{\max}$ variant de 10° à 80° maximum, enregistrez $\theta(t)$ durant quelques oscillations du pendule.
  - Mesurez la période T des oscillations pour chaque amplitude $\theta_{\max}$ choisie et regroupez les données en tableau. Expliquez comment vous avez procédé pour mesurer T.
  - Tracez la courbe de T en fonction de $\theta_{\max}$. Commentez.

Une modélisation plus fine du problème, faisant intervenir les premiers termes nonlinéaires du développement de $\sin\theta$ dans l'équation différentielle du mouvement (cf cours sur les oscillateurs), permet d'obtenir

1. Un saut brutal dans $\theta(t)$ va donner, une fois dérivé, un pic intense.

en première approximation la dépendance suivante de la période T en $\theta_{\max}$:

$$T \approx T_0 \left(1 + \frac{\theta_{\max}^2}{16}\right) \quad \text{avec} \quad \theta_{\max} \quad \text{en radians (\textit{Formule de Borda})}$$

et en notant T_0 à la période des « petites oscillations » (typiquement $\theta_{\max} < 10°$).

• ***MANIP 5 : Formule de Borda***

En effectuant une régression linéaire en fonction d'un choix de variables judicieux, vérifier cette loi.
On pourra travailler sur l'ordinateur à l'aide d'un tableur par commodité, et on représentera le graphe de la régression.

III. Amortissement fluide

Si vous travaillez avec un ancien pendule, les oscillations vont maintenant être effectuées dans de l'eau. Plusieurs méthodes sont possibles, qui donneront un amortissement de plus en plus fort : masse émergée et tige immergée, masse émergée et tige immergée munie d'une grille ou plaque (accessoire à visser), masse partiellement ou totalement immergée... Pour éviter d'exciter des **modes de bassin** (vagues) trop intenses, ce qui perturberait significativement l'expérience, il est recommandé de fonctionner avec la masse émergée. Quoi qu'il en soit, une fois le dispositif adapté à votre guise, il importe de **mesurer de nouveau la période propre** T_0 aux petites oscillations car elle aura été modifiée.
Insérez ensuite le bac prévu pour l'eau sous le pendule, ajoutez suffisament d'eau à l'aide de bouteilles en plastique et repositionnez les caches. **On veillera à ne pas mettre trop d'eau pour éviter les débordements intempestifs, et gare aux éclaboussures svp.**

Si vous travaillez avec un pendule récent, muni d'un frottement à courants de Foucault, fixer l'aimant de sorte à ce qu'il passe le plus près possible de la plaque métallique (non magnétique) sans la toucher.

On souhaite observer l'évolution de $\theta(t)$ pour un pendule lâché sans vitesse initiale. On choisira une amplitude initiale «faible» ($\theta_{\max} \sim 10° - 20°$) de façon à travailler avec des oscillations linéaires, que l'on sait modéliser quantitativement.

• ***MANIP 6 : Enregistrement du mouvement***

— Réalisez l'enregistrement de $\theta(t)$ en réfléchissant à l'adaptation de la durée et du nombre de points de l'acquisition, afin de bien visualiser l'amortissement. Commentez la courbe obtenue.

— Tracez le portrait de phase correspondant et commentez.

Afin de vérifier si la décroissance de l'amplitude des oscillations est exponentielle, on propose de tracer la courbe de

$$\ln \frac{\theta(t_0)}{\theta(t_0 + nT)}$$

en fonction de l'entier n, où t_0 désignera un instant où θ est maximal (ou minimal) et T désigne la *pseudo-période*[2]. On pourra de nouveau travailler à l'aide d'un tableur par commodité.

• ***MANIP 7 : Analyse précise de la décroissance de l'amplitude***

— Relever les valeurs des maxima (minima) successifs $\theta(t_0 + nT)$.

— Calculer les valeurs de $\ln \frac{\theta(t_0)}{\theta(t_0+nT)}$, puis tracer le graphe en fonction de n. Conclusion ?

— Mesurer la pente δ de la droite de régression, que l'on appelle le *décrément logarithmique*.

— Estimer les incertitudes sur les mesures de θ. En déduire les barres d'incertitudes des points du graphe et les ajouter au graphe.
On utilisera l'estimation suivante : $\Delta \ln \theta = \frac{\Delta\theta}{\theta}$.

— Estimer l'incertitude sur δ par *la méthode des droites extrêmes*[a].

[a]. On trace arbitrairement 2 droites qui passent au bord des cases définies par les barres d'incertitude, ce qui détermine un intervalle possible de valeurs pour la pente (et l'ordonnée à l'origine).

2. On parle de pseudo-période lorsque le mouvement est oscillatoire mais amorti progressivement, cf cours.

- ***MANIP 8 : Pseudo-période T, pulsation propre ω_0 et facteur de qualité Q***
  - Mesurez la valeur de la pseudo-période T et estimez l'incertitude ΔT sur la mesure. Indiquer comment vous avez procédé.
  - Déduire des mesures précédentes la *période propre* T_0 du pendule, c'est-à-dire la période qu'il aurait en l'absence de frottements (pour des petites amplitudes), grâce à la relation

$$T = T_0\sqrt{1+\frac{\delta^2}{4\pi^2}}\,.$$

  - Déterminez l'incertitude ΔT_0 grâce à la relation admise : $\Delta T_0 = T_0\sqrt{\left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2+\left(\frac{\delta\,\Delta\delta}{4\pi^2+\delta^2}\right)^2}$.
  - Vérifiez que la valeur de T_0 correspond bien à celle mesurée avant l'introduction du frottement fluide.

IV. Amortissement par frottements solide

Afin d'étudier spécifiquement ce frottement, on fait en sorte que la force de frottement fluide soit la plus faible possible et on retire donc AVEC PRÉCAUTION [3] le bac contenant l'eau (et éventuellement les accessoires). Si besoin on redescend la masse. On prendra donc soin de **mesurer de nouveau la période propre** T_0 aux petites oscillations.

Appliquez cette fois un **léger frottement solide** en serrant plus ou moins la vis au niveau de l'axe de rotation du pendule. Le mouvement sera à nouveau étudié pour de faibles amplitudes pour ne pas avoir d'effets nonlinéaires.

- ***MANIP 9***
  - Mesurer la période T des petites oscillations du pendule. Comparer à T_0. Conclusion ?
  - Vérifiez que l'amplitude de θ décroît à chaque aller-retour du pendule d'une quantité constante (notée $4A$) et déterminez la constante A, caractéristique du frottement solide appliqué.
    Comment cette propriété se manifeste-t-elle sur la courbe de $\theta(t)$? Comparez avec le cas précédent.
  - Tracez la trajectoire de phase $\dot{\theta}(\theta)$. Commentez la forme de la courbe obtenue.

ANNEXE - Acquisition numérique d'un signal

Principe de la Conversion Analogique-Numérique

La carte d'acquisition permet de transformer le signal *analogique* (continu dans le temps) en un signal *numérique* (sous forme d'échantillons stockés dans une mémoire). On parle de Conversion Analogique-Numérique (CAN). Cette CAN consiste en deux étapes : l'*échantillonnage* [4] puis la *quantification* [5].

Lors de l'acquisition, il faut régler la période d'échantillonnage T_e de sorte à reproduire aussi fidèlement que possible les signaux reçus. Concrêtement, plus il y a d'échantillons pour une durée donnée plus le signal est bien reproduit.

La période (ou la fréquence) d'échantillonnage T_e ($f_e = \frac{1}{T_e}$) est déterminée par deux paramètres de l'acquisition : (i) la durée de l'acquisition Δt et (ii) le nombre de points N utilisé pour cette acquisition. On a donc $\boxed{T_e = \Delta t/N}$.

3. Pour éviter des catastrophes, le bac d'eau pourra être vidé en pratiquant un siphon à l'aide d'un tuyau.
4. La carte enregistre les valeurs du signal seulement à certains instants t_k régulièrement espacés d'une durée appelée T_e appelée *période d'échantillonnage*. La fréquence d'échantillonnage $f_e = 1/T_e$ est réglable, mais limitée par valeur supérieure, la carte étant forcément limitée en rapidité d'exécution.
5. La valeur de la tension $u(t_k)$ est approximée par une valeur u_n parmi N valeurs possibles, dans un système de codage à p bits. Le nombre N dépend de la résolution de la carte (p bits) : $N = 2^p$.