

Chronophotographie et oscillations forcées

Prenez en note tout élément pouvant figurer dans un compte-rendu de TP :
mesures, calculs d'incertitude, observations (schémas) et interprétations, méthodes expérimentales...

Déroulement du TP : compte-tenu de la rareté du matériel de mécanique, le TP est décomposé en 2 sous-TPs indépendants de 2H chacun (sections I. et II.). Les groupes permuteront donc au bout de 2H.

Objectifs :

- Capturer un mouvement puis l'analyser d'un point-de-vue cinématique et dynamique ;
- Etudier les oscillations forcées d'un oscillateur mécanique amorti.

I. Mouvements de chute libre ou avec frottement

Chronophotographie

Il s'agit historiquement de la technique de superposition de photographies prises en mode "rafale" (succession rapide de clichés) ou d'images de caméra sur un film. Cette superposition permet de visualiser la trajectoire d'un objet, mais aussi d'en étudier le mouvement ainsi discrétisé. À l'ère du numérique, la vidéo par webcam ou caméra rapide remplace et complète aujourd'hui ce procédé.

La capture du mouvement sera réalisée à l'aide d'une caméra rapide et du logiciel CINERIS (cf annexe). On travaillera selon les besoins avec une balle de golf en mouvement dans l'air, ou une bille d'acier en mouvement dans l'eau. Une fois le mouvement filmé, on extraira les coordonnées de la balle en fonction et on l'exportera vers un tableur pour l'exploitation numérique. Pour ne pas perdre de temps, pour chaque type d'expérience on enchaînera les acquisitions vidéo sans attendre d'avoir terminé l'exploitation numérique. Cette dernière sera commencée en parallèle et terminée à la maison.

Protocole pour l'étude d'un mouvement par chronophotographie :

- Veiller au bon contraste de l'image : bon éclairage, objet clair, fond sombre, absence de reflets sur l'éprouvette dans la zone de chute (avec l'eau).
- Disposer un étalon de longueur dans le plan du mouvement ou près de ce plan (corriger éventuellement de l'erreur de parallaxe).
- Réfléchir au point-de-vue de la caméra : essayer de minimiser les problèmes de parallaxe, tout en assurant une luminosité suffisante et une occupation optimale du champ par le mouvement.
- Réfléchir au nombre d'images par seconde nécessaire compte-tenu de la vitesse du mouvement, et de l'espace de sauvegarde disponible ^a. Faire des essais si besoin.

^a. Si vous n'avez pas assez d'espace sur votre clé USB, ce n'est pas grave. La qualité de l'échantillonnage doit primer.

I.1. Chute libre d'une balle sans vitesse initiale

• MANIP 1 : Capture du mouvement

- Filmer la chute d'une balle de golf sans vitesse initiale ^a.
- Extraire les coordonnées de la balle, puis les exporter vers un tableur pour traitement.
- Peser la balle à l'aide des balances.

^a. ainsi que plusieurs rebonds successifs si la trajectoire est bien verticale, pour gagner du temps dans la MANIP. 3.

• MANIP 2 : Exploitation

- La loi horaire de la cote $z(t)$ est-elle quadratique? Peut-on négliger les frottements de l'air et valider la loi de la chute libre $\ddot{z} = g$?
On pourra pour cela tracer le graphe d'une relation linéaire bien choisie, sachant que la forme générale de la loi horaire attendue est alors : $z(t) = z_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}g(t - t_0)^2$, pour un axe Oz orienté vers le bas.
- En déduire une mesure du champ de pesanteur g . Evaluer son incertitude.

I.2. Etude énergétique des rebonds

• MANIP 3 : Rebonds d'une balle

- Capturer le mouvement avec plusieurs rebonds successifs (au moins 2 rebonds).
- Calculer puis tracer l'évolution temporelle des énergies cinétique $E_c = \frac{1}{2}mv^2$, potentielle de pesanteur $E_p = -mgz$, et mécanique $E_m = E_c + E_p$.
Pour évaluer la vitesse instantanée, on calculera une différence finie du type $v_k = \frac{z_{k+1} - z_{k-1}}{t_{k+1} - t_{k-1}}$.
- L'énergie mécanique est-elle conservée lors d'un « vol » ?
- L'énergie cinétique est-elle conservée pendant un choc au sol ? (on parle alors de *choc élastique*)

I.3. Chute d'une balle avec frottements fluides et sans vitesse initiale

a. Approche théorique

Dans le cas où les frottements fluides ne sont pas négligeables, ceux-ci dépendent des conditions de l'écoulement fluide à travers le *nombre de Reynolds*¹ :

$$Re = \frac{\rho_0 V L}{\eta}$$

où ρ_0 est la masse volumique du fluide, η sa viscosité, V une vitesse caractéristique de l'écoulement (ou de l'objet mobile dans le fluide), et L une longueur caractéristique de l'objet.

Pour un objet sphérique, on retient en général la classification simplifiée suivante :

- pour $Re < 1$, la force dépend **linéairement** de la vitesse : $\vec{F} = -\alpha \vec{v}$;
- pour $30 < Re < 100$, la force varie selon : $\vec{F} = -\beta v^{1,4} \frac{\vec{v}}{v}$, où l'on note $v = \|\vec{v}\|$;
- pour $Re > 1000$, la force dépend **quadratiquement** de la vitesse : $\vec{F} = -\gamma v \vec{v}$;

Lois horaires de vitesse et coefficients de frottement

→ Dans le cas linéaire, on sait résoudre le problème analytiquement et on obtient pour la vitesse la loi horaire (dans le cas sans vitesse initiale, à retrouver en exercice) :

$$v(t) = v_\ell + (v(0) - v_\ell) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{en posant} \quad v_\ell = \frac{mg}{\alpha} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{v_\ell}{g} = \frac{m}{\alpha}.$$

On voit que v_ℓ représente la **vitesse limite atteinte au bout d'un temps grand devant le temps caractéristique** τ . Pour Re suffisamment petit on tend vers la loi de Stokes, selon laquelle

$$\alpha = 6\pi\eta R,$$

où R est le rayon de la sphère.

→ Dans le cas quadratique, et pour Re pas trop grand, on modélise le coefficient de frottement par

$$\gamma = C_x \pi R^2 \frac{1}{2} \rho_0$$

où R est toujours le rayon de la balle, ρ_0 la masse volumique du fluide et C_x un coefficient d'aérodynamisme. On sait aussi résoudre le problème analytiquement dans le cas sans vitesse initiale. On obtient alors pour la vitesse la loi horaire suivante (à retrouver en exercice) :

$$v(t) = v_\ell + (v(0) - v_\ell) \tanh\left(\frac{t}{\tau}\right) \quad \text{avec} \quad v_\ell = \sqrt{\frac{mg}{\gamma}} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{v_\ell}{g} = \sqrt{\frac{m}{g\gamma}}.$$

De nouveau, v_ℓ représente la **vitesse limite atteinte au bout d'un temps grand devant τ** (car $\lim_{u \rightarrow \infty} \tanh(u) = 1$).

1. cf programme de seconde année.

→ Pour le cas intermédiaire, on ne sait pas résoudre analytiquement le mouvement. Seule une approche numérique est possible. Toutefois on peut toujours donner la vitesse limite théorique, et en déduire par analyse dimensionnelle un temps caractéristique du régime transitoire :

$$v_\ell = \left(\frac{mg}{\beta} \right)^{\frac{1}{1,4}} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{v_\ell}{g}.$$

Composante statique de la force du fluide : force d'Archimède

En réalité, plus de la force de frottement fluide, on doit considérer aussi la *poussée d'Archimède*, qui rend compte de l'existence d'un gradient vertical de pression du au champ de pesanteur². Cette force de poussée s'oppose à la pesanteur, et conduit dans les calculs précédents à remplacer g par une *pesanteur effective* plus faible :

$$g' = g \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho} \right),$$

où ρ est la masse volumique moyenne de la balle (ou bille), et ρ_0 celle du fluide.

Q1. Peut-on négliger la force d'Archimède pour la balle de golf dans l'air ? Et pour la balle de ping pong ? Et pour la bille dans l'eau ?

b. Approche expérimentale

On souhaite ici trouver quelle loi de frottement représente le mieux le mouvement observé avec une bille d'acier dans une éprouvette remplie d'eau. Le principe est de valider l'un des modèles ci-dessus en évaluant expérimentalement la vitesse limite v_ℓ , supposée atteinte en fin de parcours. Si cela est pertinent, on utilisera la pesanteur effective pour les calculs.

Q2. Compte-tenu des modèles présentés ci-dessus, vous semble-t-il préférable de choisir un bille de rayon petit, moyen ou grand ?

• MANIP 4 : Capture du mouvement

- Capturer la chute sans vitesse initiale d'une bille d'acier dans l'eau. On veillera à éclairer judicieusement l'expérience pour faciliter l'extraction automatique grâce au logiciel.
- Extraire le mouvement pour exploitation dans un tableur.
- Peser la bille.

• MANIP 5 : Exploitation de la loi horaire du mouvement

- Peut-on négliger les frottements de l'eau ? Répondre par un graphe et une régression linéaire.
- Si ce n'est pas le cas, la vitesse limite v_ℓ est-elle atteinte au cours du mouvement capturé ? Evaluer cette vitesse, ou au mieux un minorant de cette vitesse. En déduire le temps caractéristique τ du régime transitoire.
- Proposer une approche cinématique à base de régressions linéaires pour des variables bien choisies, pour trancher entre le modèle de force linéaire et le modèle quadratique.
- En déduire une mesure du coefficient de frottement, et du C_x de la bille si c'est un frottement quadratique.
- Evaluer le nombre de Reynolds sachant que la viscosité de l'eau à température ambiante est $\eta \approx 1,002 \times 10^{-3}$ Pa.s. Sa valeur est-elle cohérente avec la classification présentée ci-dessus ?

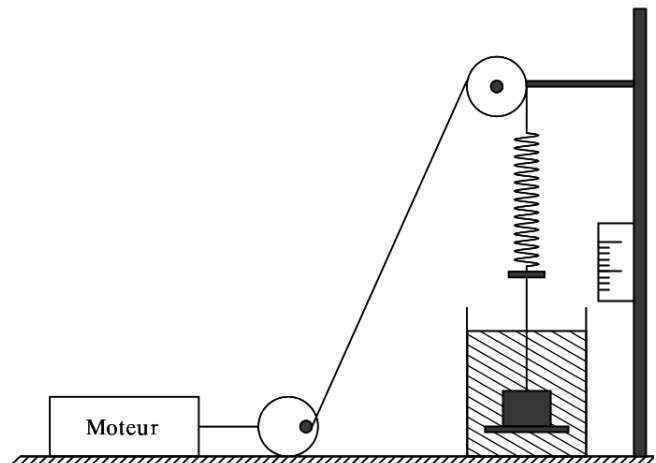
• MANIP 6 : Expérience complémentaire... si le temps le permet

Proposer une approche expérimentale basée sur la mesure de v_ℓ pour différentes billes permettant de trancher entre les 3 modèles de frottement.

². cf cours de Thermodynamique au printemps.

II. Oscillations forcées d'un système masse - ressort amorti

On s'intéresse au dispositif ci-contre, constitué d'un système masse-ressort vertical relié à un moteur permettant de fonctionner en Régime Sinusoïdal Forcé (RSF), c'est-à-dire d'imposer un mouvement sinusoïdal à une fréquence f fixée par le moteur. La masse est ajustable. On peut la plonger dans l'eau pour lui appliquer un amortissement par frottement fluide, dont on peut moduler la force en ajoutant une rondelle de diamètre variable. Avant de s'intéresser aux mouvements en régime libre (c'est-à-dire sans moteur), et en régime forcé (RSF), on réalise une étude statique (à l'équilibre).



II.1. Etude statique

On rappelle³ qu'un ressort exerce une force dite *de rappel* qui obéit à la loi de HOOKE, à savoir qu'elle est proportionnelle à l'*allongement* $\ell - \ell_0$ du ressort, différence entre la longueur ℓ et la longueur à vide ℓ_0 (qu'aurait le ressort si on le détachait). On souhaite déterminer la *raideur* k du ressort, qui est le facteur de proportionnalité de cette force. Pour cela on place la masse hors de l'eau et on cherche la position d'équilibre z_{eq} .

• MANIP 1 : Mesure de la raideur du ressort

A l'aide d'une série de mesures pour des masses m différentes, mesurer la raideur k du ressort.

On pourra utiliser un tableur et effectuer une régression linéaire pour des variables bien choisies, pour améliorer la précision et éliminer des erreurs éventuelles.

On pourra aussi en profiter pour effectuer en même temps les mesures de la MANIP 3 ci-dessous.

On souhaite maintenant plonger la masse dans l'eau, qui est un fluide 1000 fois plus dense que l'air. En plus de la force de frottement fluide, l'eau va exercer une poussée d'Archimède sur la masse immergée. On souhaite savoir si cela doit être pris en compte sous la forme d'une pesanteur effective (cf section I.3.a) ou si c'est négligeable.

• MANIP 2 : Immersion de la masse - poussée d'Archimède

- En contrôlant l'évolution de la position d'équilibre (sans eau puis avec eau), déterminer si la force d'Archimède est perceptible.
- En contrôlant l'évolution du niveau d'eau avant et après immersion, déterminer le volume de la partie immergée.
- Connaissant la masse volumique de l'eau $\rho \approx 1000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, peut-on conclure que le principe d'Archimède est vérifié ?

II.2. Régime libre

a. Dans l'air

On place de nouveau la masse en dehors de l'eau. On souhaite savoir si l'on peut négliger la masse propre du ressort dans la modélisation théorique du mouvement.

• MANIP 3 : Période propre

3. cf cours de dynamique

- Pour différentes masses accrochées, mesurer la période propre T_0 de l'oscillateur.
- Vérifier par une régression linéaire pour des variables bien choisies que la loi $T_0 = 2\pi \sqrt{m/k}$ est bien vérifiée.
- En déduire une seconde estimation de la raideur k
- En déduire si le ressort peut-être considéré sans masse. Si oui à quelle condition ?

b. Dans l'eau

Dans la suite, on fonctionne avec la masse immergée, à laquelle on ajoute une rondelle pour accentuer le frottement fluide. Pour ne pas avoir de problème lié à une résonance trop forte en RSF, on prendra trois masses associées à la rondelle de taille moyenne. Pour l'approche théorique, on supposera que la force de frottement est linéaire en la vitesse (cf section I.3.a) : $\vec{F} = -\alpha\vec{v}$, où α est le *coefficient de frottement*. On admettra qu'il n'est pas nécessaire de considérer l'effet de la force d'Archimède pour l'étude des régimes variables.

• MANIP 4 : Pseudo-période et facteur de qualité

- Mesurer la période propre T_0 du système nouvellement équipé dans l'air.
- Immerger la masse. Mesurer la *pseudo-période*^a T . En déduire la valeur du coefficient de frottement α de la force, sachant qu'en théorie^b

$$T_0 = T \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4mk}}.$$

a. c'est-à-dire l'équivalent de la période mais pour un mouvement oscillatoire amorti.

b. cf cours sur les régimes libres en électrocinétique.

II.3. Régime sinusoïdal forcé

Grâce au moteur et à la poulie, la cote de l'extrémité supérieure du ressort suit une loi horaire sinusoïdale, c'est-à-dire du type

$$z_1(t) = a \cos(\omega t) + z_{10} \quad \text{avec} \quad \omega = 2\pi f,$$

où f est la *fréquence* de rotation du moteur, ω sa *pulsation*, et a l'*amplitude* du forçage. On rappelle que dans le référentiel du laboratoire, en prenant l'origine des cotes en la position d'équilibre, l'équation du mouvement de la masse s'écrit :

$$\ddot{z} + \frac{\alpha}{m} \dot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 a \cos(\omega t) \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

• MANIP 5

- Relever la courbe de réponse fréquentielle, donnant l'amplitude des oscillations en fonction de la fréquence.
- Tracer le graphe associé à l'aide du tableur. Mesurer graphiquement l'amplitude du forçage a , puis la fréquence de *résonance* f_r et l'amplitude à la *résonance* $Z_{m_{\max}}$, c'est-à-dire lorsqu'elle est maximale.
- En déduire la valeur du coefficient de frottement α de la force, sachant qu'en théorie^a

$$f_r = f_0 \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{2mk}}.$$

- Que vaut le déphasage entre forçage et position de la masse lorsque la fréquence vaut la fréquence propre de l'oscillateur : $f = f_0$? et à "haute fréquence", c'est-à-dire pour $f \gg f_0$?

a. cf cours sur le RSF.

ANNEXE - Utilisation du logiciel de capture d'ATELIER SCIENTIFIQUE (CINERIS)

- Brancher la caméra à l'aide du câble USB directement sur l'ordinateur sans passer par l'interface FOXY, puis démarrer le logiciel (passer le message indiquant l'absence d'interface) ;
- Cliquer sur l'icône en forme de webcam ;
- Onglet ACQUISITION :
 - Onglet PARAMÉTRAGE VIDÉO : choisir le format des images en fonction de la scène à filmer (dimensions du cadre et nombre 'images maximal par secondes... peu limitant !)
 - Onglet MONTAGE : sélectionnez la partie utile du film ;
 - Onglet TRAITEMENT MANUEL : extraire le mouvement d'un point ou plusieurs de façon manuelle ;
 - Onglet TRAITEMENT AUTOMATIQUE : idem mais le logiciel reconnaît automatiquement l'objet (choisir un niveau de contraste). Cette méthode n'est opérante que si l'objet à suivre est très contrasté par rapport à son environnement.
- Pour le Traitement Automatique (**à privilégier** pour la rapidité et la qualité de l'extraction) :
 - bouton ETALONNER : choisir une origine de repère puis définir un vecteur de longueur définie pour étalon de longueurs et sens positif.
 - bouton CADRE DE TRAVAIL : permet de redimensionner la zone d'étude (sous-fenêtre) ;
 - bouton PARAMÉTRAGE : choix de l'objet 1 et éventuellement de l'objet 2 ;
 - La zone graphique (à droite) est constituée d'onglets (en bas) : *graphique* (courbe), *tableau* (valeurs), *Compte-rendu*, *Vidéo* ; En particulier il est possible d'extraire les données du tableau pour les traiter dans un tableur.