ANNEXE A - Introduction aux incertitudes de mesure

A.1. Notion d'incertitude

On suppose que l'on mesure une grandeur X à laquelle on a un accès direct.
Exemples :

- position sur le banc d'optique ;
- distance entre deux éléments mesurée avec une règle graduée ;
- mesure de tension avec un voltmètre ;
- mesure de courant avec un ampèremètre...

Suite à la mesure on obtient une valeur notée x, associée à une *incertitude* notée $u(X)$, qui traduit le caractère *aléatoire* des erreurs de mesures. On note alors le résultat de la mesure par

$$X = x \pm u(X) \; .$$

La connaissance de $u(X)$ n'est pas une question simple et plusieurs approches sont possibles, que nous présenterons plus tard en cours. Dans toute la suite on suppose que $u(X)$ est une *incertitude-type*, c'est-à-dire un écart-type de la distribution statistique des erreurs (cf cours dédié).

Nous abordons ici les choses simplement : on évalue une incertitude à l'aide des données dont nous disposons sur l'instrument de mesure, relatives à sa précision. Dans ce TP nous mesurons des distances, à l'aide d'un réglet gradué ou de la règle du banc d'optique. L'incertitude sera donc fortement contrainte par le niveau de précision des graduations, mais elle peut aussi dépendre du protocole de mesure choisi (profondeur de champ de l'œil nu ou avec viseur, latitude de mise-au-point du viseur...). On veillera donc à garder le même protocole d'un bout à l'autre d'une série de mesures, et on tachera de déceler et éliminer d'éventuelles *erreurs systématiques*[1].
Notons que l'on fait parfois usage de l'*incertitude relative*, notée $\frac{u(X)}{X}$, dont on obtient la valeur en remplaçant simplement X par sa valeur mesurée,

$$\frac{u(X)}{X} = \frac{u(X)}{|x|}$$

et qu'on exprime souvent par un pourcentage.

A.2. Propagation des incertitudes - *incertitudes composées*

Lorsque la mesure de X doit permettre d'accéder à une autre grandeur qui en dépend, notée $Z = f(X)$, l'erreur de mesure faite sur X induit une erreur sur la grandeur Z. On dit qu'elle se propage. De même l'incertitude se propage, et ce d'une façon qui n'est pas forcément évidente. Il y a deux façons simples d'aborder ce problème :

- **simuler numériquement** cette propagation grâce à un moteur de nombres aléatoires, en partant d'une incertitude connue sur X et d'une distribution de probabilité supposée valable pour les mesures répétées (*uniforme* ou *gaussienne* le plus souvent) ; on parle de *Méthode Monte Carlo* ;
- utiliser le **calcul différentiel** pour construire de façon analytique des **relations de propagation d'incertitudes**.

La seconde méthode présente l'intérêt de la simplicité, mais mise-à-par certains cas particuliers (cf ci-dessous), **elle n'est en général correcte que lorsque l'incertitude relative $\frac{u(X)}{X}$ est suffisamment faible** (la distribution statistique des mesures est alors dite *très piquée* au voisinage de la moyenne). Typiquement son utilisation n'est pas très correcte au-delà de 10-20% d'incertitude relative. Mais ce seuil dépend de la fonction f qui relie les variables X et Z. C'est toutefois la méthode que nous allons utiliser ici. On retiendra en particulier les cas suivants[2], dont on peut noter que **certaines (translation, linéarité, et addition-soustraction) sont des relations exactes** qui ne nécessitent aucune condition de validité.

1. Comme leur nom l'indique, les erreurs systématiques ne sont pas aléatoires et se reproduisent toujours dans le même sens. Elles sont souvent induites soit par la modélisation soit par le mode opératoire, et sont alors faciles à éliminer.
2. Les relations encadrées sont celles qu'on retient et applique usuellement, les autres s'en déduisent.

Relations usuelles de propragation des incertitudes

- **Translation** : $Z = X + a$ (où a est une constante réelle) :

$$\boxed{u(Z) = u(X)}$$

Relation exacte en toute circonstance.

- **Linéarité** : $Z = \alpha X$ (où α est une constante réelle) :

$$\boxed{u(Z) = u(\alpha X) = |\alpha|\, u(X)} \quad \text{et} \quad \frac{u(Z)}{Z} = \frac{u(\alpha X)}{|\alpha x|} = \frac{u(X)}{X}$$

Relation exacte en toute circonstance.

- **Inversion** : $Z = \frac{1}{X}$:

$$\boxed{u(Z) = u\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{u(X)}{x^2}} \quad \text{et} \quad \frac{u(Z)}{Z} = |x|\, u\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{u(X)}{X}$$

On note que dans les deux cas l'**incertitude relative se conserve** lors de la propagation. On reconnaît aussi la dérivée de la fonction $X \mapsto \alpha X$ ou $X \mapsto 1/X$, car la propagation fait appel au calcul différentiel.

Il est fréquent que la grandeur recherchée nécessite la mesure directe de deux ou plusieurs autres **grandeurs indépendantes**. Les cas suivants sont à connaître, pour une grandeur $Z = f(X, Y)$ où X et Y sont mesurées avec les incertitudes $u(X)$ et $u(Y)$ supposées connues.

- **Somme (ou différence)** : $Z = X \pm Y$

$$\boxed{u(Z) = u(X \pm Y) = \sqrt{u(X)^2 + u(Y)^2}} \quad \text{et} \quad \frac{u(Z)}{Z} = \frac{\sqrt{u(X)^2 + u(Y)^2}}{|x \pm y|}$$

Relation exacte en toute circonstance (si X et Y sont indépendantes !).

- **Produit** : $Z = XY$

$$u(Z) = u(XY) = \sqrt{y^2\, u(X)^2 + x^2\, u(Y)^2} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{u(Z)}{Z} = \frac{u(XY)}{|xy|} = \sqrt{\left(\frac{u(X)}{X}\right)^2 + \left(\frac{u(Y)}{Y}\right)^2}}$$

- **Quotient** : $Z = X/Y$

$$u(Z) = u\left(\frac{X}{Y}\right) = \sqrt{\frac{u(X)^2}{y^2} + \frac{x^2 u(Y)^2}{y^4}} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{u(Z)}{Z} = \left|\frac{y}{x}\right|\, u\left(\frac{X}{Y}\right) = \sqrt{\left(\frac{u(X)}{X}\right)^2 + \left(\frac{u(Y)}{Y}\right)^2}}$$

On voit en particulier que **pour une somme les incertitudes se combinent via une norme euclidienne, alors que pour un produit ou un quotient, c'est le cas des incertitudes relatives**. On se sert d'ailleurs plutôt de ce dernier résultat pour calculer les incertitudes via :

$$\boxed{u(Z) = |z| \sqrt{\left(\frac{u(X)}{X}\right)^2 + \left(\frac{u(Y)}{Y}\right)^2}} \quad \text{pour} \quad Z = XY \quad \text{ou} \quad Z = X/Y\ .$$

A.3. Incertitudes et régression linéaire

Lorsque l'on cherche à vérifier une loi physique qui s'exprime sous la forme d'une relation affine

$$Y = aX + b\,,$$

on procède à une série de mesures du couple (X, Y) que l'on reporte sur un graphe. Puis l'application d'un programme de traitement de données (calculatrice, tableur sur ordinateur, logiciel de traitements de données, langage de programmation comme Python...) permet de déterminer objectivement la valeur des coefficients a et b via une *régression linéaire*[3]. Il existe alors une incertitude sur la détermination de a et b due à la **dispersion naturelle des mesures** autour de la droite supposée du modèle, à laquelle on peut accéder via le logiciel.

Toutefois, pour un faible nombre de points de mesure, cette incertitude liée à la dispersion ne rend pas totalement compte des incertitudes de mesure individuelles $(\Delta X, \Delta Y)$ liées au protocole de mesure, et que l'**on doit faire apparaître sous la forme de *barres d'erreur* sur le graphe**. Les points (croix) de mesure ressemblent alors à des rectangles. Dans ce contexte, de nouveau il existe deux approches simples pour obtenir les incertitudes $u(a)$ et $u(b)$:

- par simulation numérique à partir des valeurs mesurées et des incertitudes $u(X)$ et $u(Y)$ (*Méthode Monte Carlo*, abordée plus tard) ;
- par la méthode (graphique) des *droites extrêmes*.

Méthode des droites extrêmes

Cette méthode parfois un peu arbitraire permet d'évaluer simplement l'incertitude sur le couple (a, b) **en traçant les *droites extrêmes* passant (si possible) à l'intérieur de toutes les barres d'erreur**. On détermine ainsi pour chacune les valeurs extrêmes possibles du couple (a, b). Sous l'hypothèse d'une distribution statistique uniforme, l'incertitude-type s'obtient alors en divisant la demi-largeur de cet intervalle trouvé par[4] $\sqrt{3}$:

$$u(a) = \frac{a_{\max} - a_{\min}}{\sqrt{12}} = \frac{a_{\max} - a_{\min}}{2\sqrt{3}}$$

et de même pour $u(b)$.

Remarques :

- Il arrive parfois que l'on n'arrive pas à faire passer la droite par toutes les barres d'erreur. C'est en général le signe d'un écart important des mesures par rapport au modèle théorique, ou d'une mauvaise évaluation des incertitudes de mesure $u(X)$ et $u(Y)$ (parce que trop pessimiste, ou utilisation abusive des formules de propagation...).
- Si l'on ne cherche à mesurer qu'un seul des paramètres a et b, et qu'on s'estime certain de l'autre, on peut alors restreindre le choix des droites extrêmes :
  - si l'on est certain de a, on cherche des droites extrêmes parallèles à la droite de régression[5], ou simplement parallèles entre elles ;
  - si l'on est certain de b, on cherche des droites extrêmes d'ordonnée à l'origine b mais d'inclinaison différente.

3. On utilise habituellement la méthode des moindres carrés. Cf cours dédié.
4. Ce facteur est le résultat d'un calcul probabiliste reposant sur une distribution continue... cf programme de maths de fin d'année.
5. Dans certains logiciels il est possible de fixer l'un des paramètres pour n'effectuer la régression que sur le second. On ne laisse alors qu'un seul degré de liberté.