Focométrie

On prendra soin de reporter dans le compte-rendu :
courbes visualisées, mesures et leur incertitude, commentaires et interprétations.
Les questions sont là pour orienter la rédaction, donner une idée des choses à discuter.

Objectifs :

À l'issue de ce TP vous devrez savoir mesurer les distances focales ("focométrie") de lentilles, par différentes méthodes. On mettra en évidence les avantages et les inconvénients de chacune de ces méthodes, en précisant les sources d'incertitudes sur les mesures.

Les valeurs de distances focales indiquées sur les lentilles ne sont données qu'à titre indicatif et ne constituent en aucun cas une référence exacte. Vous devez donc effectuer vos propres mesures accompagnées de leur incertitude. Pour l'évaluation des incertitudes, on se réfèrera à l'annexe. On veillera à choisir un mode opératoire susceptible d'optimiser la précision des mesures.

I. ESTIMATION rapide de la distance focale d'une lentille : objet à l'infini

Si l'on ne cherche pas une grande précision mais une simple estimation rapide, on utilise l'image d'un objet très éloigné.

• ***MANIP 1***

Estimez les focales de deux lentilles convergentes différentes.

Q : Confondre l'objet éloigné avec un objet à l'infini induit une erreur sur la focale.

— Cette méthode est-elle plus adaptée pour les grandes ou pour les petites focales ? Justifier.

— La focale mesurée est-elle plus petite ou plus grande que la focale réelle ? Justifier.

Q : Comment pourriez-vous réaliser l'estimation de la focale d'une lentille divergente, toujours par formation de l'image d'un objet très éloigné ?

II. Mesures PRÉCISES de distances focales de lentilles CONVERGENTES

On gardera **la même lentille** dans les différentes méthodes de façon à pouvoir les comparer.

II.1. Autocollimation : Mesures précises à l'aide d'un viseur

La méthode d'autocollimation a été vue au TP N°1. Ici on mesure la distance objet-lentille de façon précise, à l'aide d'un viseur.

• ***MANIP 2***

— Réalisez le montage d'autocollimation avec l'une des lentilles convergentes précédentes.

— En utilisant le viseur, déterminez la distance focale f' de cette lentille.

— Estimer l'incertitude $\Delta f'$ de la mesure.

II.2. Utilisation de la relation de conjugaison de Descartes

Dans cette section, on se sert de la formule de conjugaison de Descartes :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

Plutôt que de l'exploiter sur un seul couple de points conjugués, on préfère répéter la mesure pour plusieurs couples. Cela permet non seulement d'améliorer la précision sur f', mais aussi de **vérifier que la loi de Descartes est vraie** par la même occasion.

Q : Peut-on appliquer la méthode décrite pour $\overline{AO} < f'$? Si oui comment ?

Q : Si l'on se restreint au cas $\overline{AO} > f'$, et compte tenu du matériel dont on dispose, quel est l'ordre de grandeur des plus grandes focales que l'on peut mesurer par cette méthode ?

Q : Pour vérifier la loi de Descartes, quelle graphe doit-on tracer à partir des mesures ?

Les mesures seront faites au viseur. On mesure une distance à l'aide de 2 pointés x_1 et x_2. On prendra soin de consigner dans un tableau de mesure les données brutes x_1 et x_2, avant de passer à toute application numérique.
On ajoutera aussi des lignes (ou colonnes) pour le calcul des incertitudes de mesure utiles. Le traitement des données sera fait à la calculatrice ou au tableur. Le graphe sera fait à la main sur papier millimétré.

• ***MANIP 3***

— Effectuer les pointés pour mesurer $\overline{OA}$ et $\overline{OA'}$ en pour une série de couples (A, A') (on fera varier $\overline{OA}$). Puis calculer ces distances.

— Estimez les incertitudes $\Delta\overline{OA}$ et $\Delta\overline{OA'}$. En déduire les incertitudes sur $\frac{1}{\overline{OA}}$ et $\frac{1}{\overline{OA'}}$.

— Exploiter ces données pour tracer la courbe adaptée pour la vérifiaction de la loi de Descartes, et pour la mesure de la distance focale f'. En déduire la valeur de f'.

— Reportez sur le graphe précédent les incertitudes. Estimer l'incertitude $\Delta f'$ à l'aide de la méthode des droites extrêmes.

II.3. Méthode de Bessel

On place un objet et un écran à une distance donnée D. On intercale la lentille convergente entre l'objet et l'écran.

• ***MANIP 4***

Déplacez la lentille (sans déplacer ni l'objet, ni l'écran) et constatez qu'il existe deux positions de la lentille pour laquelle on forme une image sur l'écran.

Soit d la distance entre ces 2 positions de la lentille, on montre (cf cours d'optique) qu'elle vérifie :

$$1 - \left(\frac{d}{D}\right)^2 = 4\,\frac{f'}{D}$$

Comme précédemment, on souhaite effectuer plusieurs mesures de façon à d'une part vérifier cette loi, et d'autre part mesurer précisément f'. On rappelle que D doit être supérieur à $4f'$ pour que l'image puisse être projetée sur l'écran.

• ***MANIP 5***

— Pour plusieurs distances D, mesurer la distance d entre les deux positions de la lentille donnant une image nette sur l'écran (réfléchir à la manière la plus précise de le faire).

— Estimez les incertitudes Δd et ΔD. En déduire les incertitudes sur $(d/D)^2$ et $1/D$.

— Sur papier millimétré, tracez une courbe adaptée à la vérification de la loi ci-dessus et la détermination de f'. Mesurer f'.

— Reporter sur le graphique précédent les incertitudes sur les quantités tracées. Estimer l'incertitude $\Delta f'$ sur la mesure de f' par la méthode des droites extrêmes.

II.4. Méthode de Silbermann

Méthode à n'effectuer que si vous en avez le temps. Sinon passez directement à la suite.

La méthode de Silbermann consiste à se placer dans le cas particulier de la méthode de Bessel où il n'y a plus deux positions possibles pour la lentille, mais une seule position double ($d = 0$). Dans ce cas, la distance entre l'objet et son image formée sur l'écran par la lentille convergente est $D = 4f'$. On montre qu'alors la lentille est à égale distance de l'objet et de l'image et donc que le grandissement transversal $\gamma = \overline{OA'}/\overline{OA}$ vaut -1.

- ***MANIP 6***
  - Mesurer la distance D entre l'objet et son image lorsque le grandissement γ est égal à -1 et précisez l'incertitude sur la mesure de D. Indiquez comment vous procédez.
  - En déduire f' et son incertitude $\Delta f'$.

Q : Discuter les avantages et inconvénients de cette méthode de mesure par rapport aux autres méthodes.

III. Mesures PRÉCISES de distances focales de lentilles DIVERGENTES

On s'intéresse maintenant à la détermination de focales de lentilles divergentes. L'image d'un objet réel par une lentille divergente étant toujours virtuelle, il est impossible de déterminer directement la distance focale par projection de l'image sur un écran. Il est alors nécessaire de faire des **mesures indirectes**, soit à l'aide d'un **viseur**, soit en s'aidant d'une **lentille auxiliaire**.

III.1. Lentille auxiliaire : formation d'un doublet convergent

La méthode consiste à accoler à la lentille divergente de focale inconnue f'_{DV} une lentille suffisamment convergente pour que l'ensemble forme un doublet convergent. Les méthodes de mesure de focales vues pour les lentilles convergentes sont alors applicables au doublet. La détermination de la focale du doublet permet alors de remonter à f'_{DV}, à condition de connaître la focale f'_{CV} de la lentille convergente (préalablement déterminée). En effet, on rappelle que les vergences de deux lentilles accolées se somment : $V_{\text{d}} = V_{\text{CV}} + V_{\text{DV}}$.

Q : Expliquez pourquoi les méthodes de Bessel ou de Silbermann sont plus adaptées à la détermination de la focale d'un doublet que l'utilisation de la relation de conjugaison de Descartes ou de l'autocollimation ?

- ***MANIP 7***
  - Choisir une lentille divergente de focale f'_{DV} à déterminer et vérifier si elle forme un doublet convergent avec la lentille convergente dont la focale f'_{CV} a été mesurée précisément au A (sinon, changer de lentille divergente).
  - Par une évaluation rapide de la distance focale du doublet f'_{d}, vérifier que la condition $D > 4f'_{\text{d}}$ sera facilement applicable sur le banc.
  - Placez le doublet sur le support adapté pour accoler les lentilles, comportant un ressort.
  - Par une méthode au choix (on se contentera d'un point de mesure), déterminez la distance focale f'_{d} du doublet. En déduire f'_{DV} ainsi que son incertitude.
    On montrera en exercice que
    $$\Delta f'_{\text{DV}} = f'^2_{\text{DV}} \sqrt{\left(\frac{\Delta f'_{\text{CV}}}{f'^2_{\text{CV}}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta f'_{\text{d}}}{f'^2_{\text{d}}}\right)^2}$$

III.2. Relation de conjugaison de Descartes

La distance focale d'une lentille divergente peut également être déterminée sans l'aide d'une lentille auxiliaire, par exemple en utilisant la relation de conjugaison de Descartes. L'image A' formée étant virtuelle, vous utiliserez un viseur pour déterminer la distance lentille-image $\overline{OA'}$. En visant la lentille, on obtiendra aussi la distance objet-lentille $\overline{OA}$. Pour pouvoir faire des comparaisons, utilisez la même lentille divergente qu'au paragraphe précédent.

- ***MANIP 8***
  - Pour plusieurs positions de la lentille (au moins une, selon le temps qu'il vous reste), mesurez au viseur les distances $\overline{OA}$ et $\overline{OA'}$. Indiquez les incertitudes $\Delta\overline{OA}$ et $\Delta\overline{OA'}$.
  - En déduire la distance focale f' de la lentille divergente et son incertitude.

Q : Discutez des avantages et inconvénients de cette méthode.

ANNEXE A - Incertitudes de mesure

A.1. Notion d'incertitude

On suppose que l'on mesure une grandeur X à laquelle on a un accès direct.
Exemples :

— position sur le banc d'optique ;

— distance entre deux éléments mesurée avec une règle graduée ;

— mesure de tension avec un voltmètre ;

— mesure de courant avec un ampèremètre...

Suite à la mesure on obtient une valeur notée x, associée à une *incertitude* notée ΔX, qui traduit le caractère *aléatoire* des erreurs de mesures. On note alors le résultat de la mesure par

$$X = x \pm \Delta X \ .$$

La connaissance de ΔX n'est pas une question simple et plusieurs approches sont possibles, que nous présenterons plus tard en cours. Nous abordons ici les choses simplement : on évalue une incertitude à l'aide des données dont nous disposons sur l'instrument de mesure, relatives à sa précision. Dans ce TP nous mesurons des distances, à l'aide d'un règlet gradué ou de la règle du banc d'optique. L'incertitude sera donc fortement contrainte par le niveau de précision des graduations, mais elle peut aussi dépendre du protocole de mesure choisi. On veillera donc à garder le même protocole d'un bout à l'autre d'une série de mesures, et on tachera de déceler et éliminer d'éventuelles *erreurs systématiques* [1].
Notons que l'on fait parfois usage de l'*incertitude relative*, notée $\frac{\Delta X}{X}$, dont on obtient la valeur par le rapport $\frac{\Delta X}{|x|}$, et qu'on exprime souvent par un pourcentage.

A.2. Propagation des incertitudes

Lorsque la mesure de X doit permettre d'accéder à une autre grandeur qui en dépend, notée $Z = f(X)$, l'erreur de mesure faite sur X induit une erreur sur la grandeur Z. On dit qu'elle se propage. De même l'incertitude se propage, et ce d'une façon qui n'est pas forcément évidente. On retiendra en particulier les cas suivants [2] :

- **Linéarité** : $Z = \alpha X$ (où α est une constante réelle ou complexe) :

$$\boxed{\Delta Z = \Delta(\alpha X) = |\alpha|\, \Delta X} \quad \text{et} \quad \frac{\Delta Z}{Z} = \frac{\Delta(\alpha X)}{|\alpha x|} = \frac{\Delta X}{X}$$

- **Inversion** : $Z = \frac{1}{X}$:

$$\boxed{\Delta Z = \Delta\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{\Delta X}{X^2}} \quad \text{et} \quad \frac{\Delta Z}{Z} = |x|\Delta\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{\Delta X}{X}$$

On note que dans les deux cas l'**incertitude relative se conserve** lors de la propagation. On reconnaît aussi la dérivée de la fonction $X \mapsto \alpha X$ ou $X \mapsto 1/X$, car la propagation fait appel au calcul différentiel.

Il est fréquent que la grandeur recherchée nécessite la mesure directe de deux ou plusieurs autres grandeurs. Les cas suivants sont à connaître, pour une grandeur $Z = f(X, Y)$ où X et Y sont mesurées avec les incertitudes ΔX et ΔY supposées connues.

- **Somme (ou différence)** : $Z = X \pm Y$

$$\boxed{\Delta Z = \Delta(X \pm Y) = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2}} \quad \text{et} \quad \frac{\Delta Z}{Z} = \frac{\sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2}}{|X \pm Y|}$$

1. Comme leur nom l'indique, les erreurs systématiques ne sont pas aléatoires et se reproduisent toujours dans le même sens. Elles sont souvent induites soit par la modélisation soit par le mode opératoire, et sont alors faciles à éliminer.
2. Les relations encadrées sont celles qu'on retient et applique usuellement, les autres s'en déduisent.

- **Produit** : $Z = XY$

$$\Delta Z = \Delta(XY) = \sqrt{y^2 \Delta X^2 + x^2 \Delta Y^2} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{\Delta Z}{Z} = \frac{\Delta(XY)}{|xy|} = \sqrt{\frac{\Delta X^2}{X^2} + \frac{\Delta Y^2}{Y^2}}}$$

- **Quotient** : $Z = X/Y$

$$\Delta Z = \Delta\left(\frac{X}{Y}\right) = \sqrt{\frac{\Delta X^2}{y^2} + \frac{x^2 \Delta Y^2}{y^4}} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{\Delta Z}{Z} = \left|\frac{y}{x}\right| \Delta\left(\frac{X}{Y}\right) = \sqrt{\frac{\Delta X^2}{X^2} + \frac{\Delta Y^2}{Y^2}}}$$

On voit en particulier que **pour une somme les incertitudes se combinent via une norme euclidienne, alors que pour un produit ou un quotient, c'est le cas des incertitudes relatives**. On se sert d'ailleurs plutôt de ce dernier résultat pour calculer les incertitudes via :

$$\boxed{\Delta Z = |z| \sqrt{\frac{\Delta X^2}{X^2} + \frac{\Delta Y^2}{Y^2}}} \quad \text{pour} \quad Z = XY \quad \text{ou} \quad Z = X/Y \; .$$

A.3. Incertitudes et régression linéaire

Lorsque l'on cherche à vérifier une loi physique qui s'exprime sous la forme d'une relation affine

$$Y = aX + b \; ,$$

on procède à une série de mesures du couple (X, Y) que l'on reporte sur un graphe. Puis l'application d'un programme de traitement de données (calculatrice, tableur sur ordinateur, logiciel de traitements de données...) permet de déterminer objectivement la valeur des coefficients a et b via une *régression linéaire* [3]. Il existe alors une incertitude sur la détermination de a et b due à la **dispersion naturelle des mesures** autour de la droite supposée du modèle, à laquelle on peut accéder via le logiciel.

Méthode des droites extrêmes

Toutefois, pour un faible nombre de points de mesure, cette incertitude liée à la dispersion ne rend pas totalement compte des incertitudes de mesure individuelles $(\Delta X, \Delta Y)$ liées au protocole de mesure, et que l'**on doit faire apparaître sous la forme de barres d'erreur sur le graphe**. Les points (croix) de mesure ressemblent alors à des rectangles. Une méthode un peu arbitraire mais simple peut alors être utilisée pour évaluer l'incertitude sur le couple (a, b) : on trace les *droites extrêmes* passant (si possible) à l'intérieur de toutes les barres d'erreur, et on détermine pour chacune les valeurs extrêmes possibles du couple (a, b). Les incertitudes finales Δa et Δb s'obtiennent alors en divisant la largeur de l'intervalle trouvé par $\sqrt{12}$... comme ceci [4] :

$$\Delta a = \frac{a_{\max} - a_{\min}}{\sqrt{12}}$$

Remarques :

- Il arrive parfois que l'on n'arrive pas à faire passer la droite par toutes les barres d'erreur. C'est en général le signe d'un écart important des mesures par rapport au modèle théorique, ou d'une mauvaise évaluation des incertitudes de mesure ΔX et ΔY.
- Si l'on ne cherche à mesurer qu'un seul des paramètres a et b, et qu'on s'estime certain de l'autre, on peut alors restreindre le choix des droites extrêmes :
  - si l'on est certain de a, on cherche des droites extrêmes parallèles à la droite de régression [5], ou simplement parallèles entre elles ;
  - si l'on est certain de b, on cherche des droites extrêmes d'ordonnée à l'origine b mais d'inclinaison différente.

3. On utilise habituellement la méthode des moindres carrés. Cf cours dédié.
4. Ce facteur est le résultat d'un calcul probabiliste reposant sur une distribution continue... cf programme de maths de fin d'année.
5. Dans certains logiciels il est possible de fixer l'un des paramètres pour n'effectuer la régression que sur le second. On ne laisse alors qu'un seul degré de liberté.