

Détection interférométrique de mouvements

par **François VANDENBROUCK, Muriel DUNLOP**

Lycée Louis-Le-Grand - 75005 Paris

francois.vandenbrouck@ac-paris.fr

muriel.dunlop@wanadoo.fr

et **Alain LE RILLE**

Lycée Janson de Sailly - 75116 Paris

alain.lerille@prepas.org

RÉSUMÉ

Nous présentons dans cet article un protocole expérimental simple permettant l'étude précise de mouvements (amplitude de déplacement et vitesse), fondé sur une méthode interférométrique. Le dispositif est essentiellement constitué d'un interféromètre de Michelson, éclairé en ondes centimétriques, dont un des deux miroirs est mobile. Nous présentons deux applications : l'étude du mouvement d'un chariot mobile par vélocimétrie à effet Doppler et l'étude complète de la réponse harmonique d'un haut-parleur électrodynamique.

1. INTERFÉROMÉTRIE ET VÉLOCIMÉTRIE À EFFET DOPPLER

1.1. Principe

La vélocimétrie à effet Doppler est une technique usuelle [1-2]. Dans cet article, nous montrons que l'utilisation d'un interféromètre de Michelson, éclairé par une onde électromagnétique centimétrique, permet de la mettre en œuvre assez simplement.

Lorsqu'une onde électromagnétique est réfléchiée par un objet en mouvement, sa fréquence est décalée par effet Doppler. Le montage interférométrique que nous présentons permet de superposer l'onde de référence et l'onde réfléchiée. L'éclairement en sortie de l'interféromètre varie avec une fréquence égale au décalage Doppler, comme nous le montrons ci-après. L'analyse de ce signal permet donc de remonter immédiatement et précisément à la vitesse et, de là au déplacement de l'objet.

1.2. Le dispositif expérimental

Le dispositif expérimental utilisé est représenté sur les photographies suivantes (cf. figure 1, page ci-après). Il s'agit d'un interféromètre de Michelson [3-4] constitué de deux plaques métalliques, jouant le rôle de miroirs et d'une plaque de bois aggloméré tenant lieu de lame séparatrice. Un des deux miroirs est solidaire d'un chariot motorisé

et peut être mis en mouvement. Nous utilisons un émetteur d'ondes centimétriques, de marque UNILAB (Phytex), qui produit une onde électromagnétique, rectilignement polarisée, de fréquence $\nu_0 = 1,07 \cdot 10^{10}$ Hz. Le lecteur trouvera dans les références [5] et [6] d'autres manipulations possibles avec des dispositifs similaires. Le récepteur délivre une tension proportionnelle à la puissance électromagnétique moyenne reçue, et donc à l'éclairement reçu, pour utiliser un terme d'optique ondulatoire.

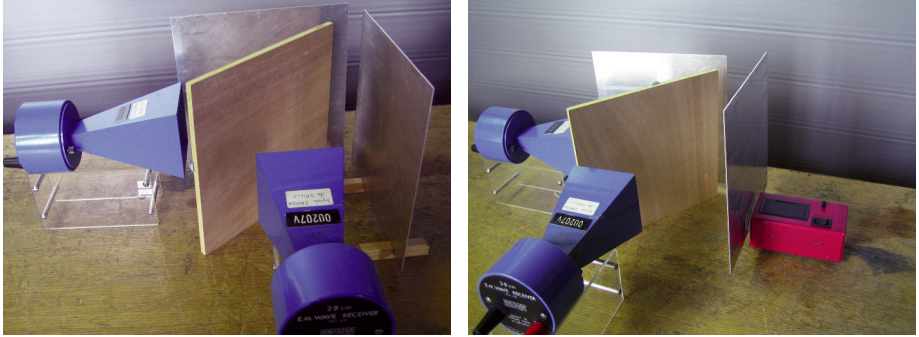


Figure 1 : Interféromètre de Michelson, avec un miroir mobile porté par un chariot motorisé.

La position de référence du miroir mobile correspond à une différence de marche résiduelle δ_0 , de sorte que l'éclairement reçu par le détecteur s'écrit :

$$\mathcal{E}(t) = 2\mathcal{E}_0 \left[1 + \cos \left(2\pi\nu_0 \frac{\delta_0}{c} + 2\pi\nu_0 \frac{2x(t)}{c} \right) \right] \quad (1)$$

où ν_0 et c sont respectivement la fréquence et la vitesse de phase de l'onde électromagnétique, et $x(t)$ le déplacement du miroir depuis sa position de référence. Si l'on note $\phi(t) = 2\pi\nu_0 \frac{\delta_0}{c} + 2\pi\nu_0 \frac{2x(t)}{c}$ la phase instantanée de l'éclairement, on peut définir la fréquence instantanée :

$$\nu(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi}{dt} = 2\nu_0 \frac{V(t)}{c} \quad (2)$$

où $V(t)$ est la vitesse instantanée du miroir mobile.

On reconnaît là l'expression du décalage fréquentiel dû à l'effet Doppler. L'étude de l'éclairement en sortie de l'interféromètre permet d'avoir accès à la vitesse et au déplacement du miroir mobile.

Dans les expériences traditionnelles de velocimétrie par effet Doppler, le signal doit être traité pour extraire le décalage fréquentiel : une détection synchrone (multiplication par un signal de référence et filtrage passe-bas) est souvent utilisée [7]. Outre sa simplicité de mise en œuvre, l'intérêt du montage interférométrique réside aussi dans le fait que les opérations de multiplication par le signal de référence et de filtrage passe-bas sont

automatiquement réalisées par le récepteur qui est sensible, rappelons-le, à la puissance électromagnétique moyenne reçue.

Nous proposons maintenant d'illustrer cette méthode par l'étude du mouvement d'un chariot mobile, puis par l'étude complète du haut-parleur électrodynamique, où l'on mesure l'amplitude de déplacement de la membrane en régime sinusoïdal forcé.

2. DÉTERMINATION DE LA VITESSE DE DÉPLACEMENT D'UN CHARIOT MOBILE

Nous utilisons l'interféromètre de Michelson précédemment décrit. Un des miroirs est placé sur un chariot motorisé. L'acquisition du signal délivré par le récepteur et la mesure de sa fréquence sont réalisées grâce à un oscilloscope numérique. L'équation (2) fournit directement la vitesse de déplacement du chariot. Nous avons reproduit l'expérience dix fois afin d'en réaliser une analyse statistique. Les résultats de nos mesures sont consignés dans le tableau 1.

Mesure	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ν (Hz)	14,92	15,53	18,51	16,35	13,58	15,35	14,59	14,99	13,98	13,82
V ($\text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$)	20,9	21,7	25,9	22,9	19,0	21,5	20,4	21,0	19,6	19,3

Tableau 1 : Différentes mesures de la vitesse du chariot.

On obtient donc (l'incertitude élargie est calculée pour un niveau de confiance de 95 %) :

$$V = (21,2 \pm 1,4) \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$$

Afin de valider la procédure de mesure, nous avons aussi estimé la vitesse moyenne de déplacement du chariot en mesurant la durée que met le chariot pour parcourir un mètre. En répétant l'expérience cinq fois, on obtient le résultat suivant :

$$V = (19,7 \pm 6,9) \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Les deux estimations de la vitesse de déplacement du chariot sont compatibles.

La détermination par effet Doppler d'une vitesse aussi petite comparée à la célérité de la lumière peut apparaître *a priori* comme une vraie gageure. La fréquence élevée des ondes centimétriques donne en réalité un décalage Doppler tout à fait mesurable, comme on peut le montrer aux élèves par une estimation d'ordres de grandeur, avant de réaliser l'expérience.

Précisons enfin que l'interféromètre de Michelson peut être utilisé pour étudier des mouvements rectilignes accélérés et que, là encore, les mesures sont très satisfaisantes.

3. LE HAUT-PARLEUR ÉLECTRODYNAMIQUE

Dans le programme de physique des classes préparatoires PC et PSI, le haut-parleur électrodynamique intervient comme un exemple de transducteur électromécanique. Nous en proposons ici une étude expérimentale, dans une version plus exhaustive que celle qui constitue une activité expérimentale traditionnelle pour nos élèves [8].

La détermination des caractéristiques expérimentales du haut-parleur a déjà été l'objet d'études [9-10]. Le dispositif que nous présentons ici se distingue cependant par la simplicité de sa mise en œuvre.

3.1. Rappel du modèle théorique du haut-parleur électrodynamique

Nous utilisons le modèle usuel du haut-parleur électrodynamique, tel qu'il est décrit dans les ouvrages de référence de CPGE (Classes préparatoires aux grandes écoles) [11-12].

Le haut-parleur est constitué d'un aimant permanent annulaire fixe, d'axe horizontal $x'x$ qui crée un champ magnétique \vec{B} radial et de norme constante B dans la région utile de l'entrefer ; d'une bobine mobile indéformable, de même axe $x'x$, comportant N spires circulaires de rayon a , d'autoinductance L et de résistance R , placée dans l'entrefer de l'aimant ; d'une membrane solidaire de la bobine et pouvant effectuer des déplacements axiaux de faible amplitude [13]. La membrane est ramenée vers sa position d'équilibre par une force élastique modélisée par un ressort de raideur k , solidaire de l'aimant à une extrémité et solidaire de la membrane à l'autre extrémité.

L'ensemble mobile, de masse m , repéré par son abscisse $x(t)$ lorsqu'il est en mouvement, est soumis aux actions mécaniques suivantes : son poids et la réaction du support, qui se compensent ; la force de rappel du ressort de raideur k ; la résultante des forces de Laplace exercées par l'aimant sur la bobine lorsqu'elle est parcourue par un courant d'intensité $i(t)$; une force de frottement fluide opposée à la vitesse de la membrane $\vec{F} = -\mu \frac{dx}{dt} \vec{e}_x$ et dont la puissance est supposée égale à la puissance sonore émise par le haut-parleur. La position $x=0$ correspond à la position de repos du système quand $i=0$. On pose $l = 2\pi Na$.

En régime sinusoïdal forcé, la résolution des équations fondamentales conduit aux résultats suivants [11-12]. L'impédance d'entrée du haut-parleur admet l'expression suivante :

$$\underline{Z}(j\omega) = R + jL\omega + \frac{R_m}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \quad (3)$$

avec $R_m = \frac{B^2 l^2}{\mu}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $Q = \frac{\sqrt{mk}}{\mu}$. On définit la fréquence propre comme suit :

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}.$$

On montre aussi que :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{x}{i} = -\frac{Bl}{k} \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q\omega_0}} \quad (4)$$

3.2. Étude de l'impédance d'entrée en régime sinusoïdal forcé

3.2.1. Dispositif expérimental

Le module de l'impédance d'entrée du haut-parleur est mesuré à l'aide du montage de la figure 2 : $\underline{Z} = -R \frac{v_s}{v_e}$. Afin d'éviter une éventuelle saturation de l'amplificateur opérationnel, la valeur de la résistance R peut être ajustée.

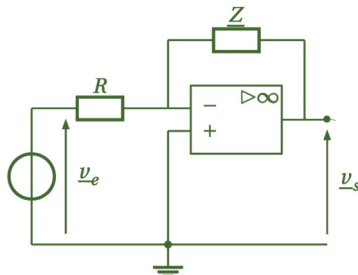


Figure 2 : Montage permettant de mesurer l'impédance du haut-parleur.

3.2.2. Résultats

La figure 3 représente les valeurs mesurées de $|Z|$ en fonction de la fréquence. L'ajustement des mesures par le modèle théorique (équation (3)) est réalisé à l'aide du logiciel *QtiPlot*, par la méthode des moindres carrés. Dans cette procédure, chaque valeur de Z est pondérée par l'incertitude expérimentale qui lui est associée.

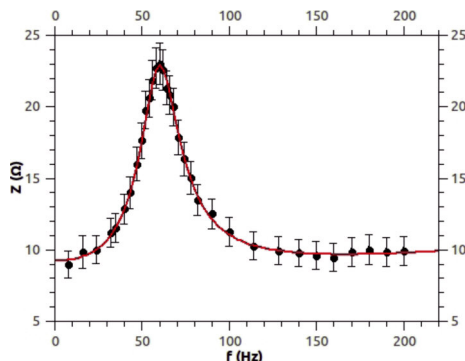


Figure 3 : Impédance d'entrée du haut-parleur en fonction de la fréquence.

L'accord entre les mesures et le modèle théorique est très satisfaisant ($\chi^2_{\text{réduit}} = 0,28$). Cet ajustement est obtenu pour les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} R &= (9,27 \pm 0,09) \Omega & L &= (3,35 \pm 0,52) \text{ mH} & R_m &= (13,6 \pm 0,1) \Omega \\ Q &= 2,61 \pm 0,05 & f_0 &= (60,4 \pm 0,2) \text{ Hz} \end{aligned} \quad (5)$$

3.3. Amplitude de vibration de la membrane

3.3.1. Dispositif expérimental

Pour la mesure de l'amplitude de vibration du haut-parleur, nous utilisons l'interféromètre de Michelson, éclairé par une onde électromagnétique centimétrique (cf. figure 1). Un des deux miroirs est remplacé par la membrane (métallisée) du haut-parleur.

Le haut-parleur est associé en série à une résistance électrique $R_1 = 300 \Omega$. L'ensemble est alimenté par un générateur basse fréquence. La valeur de la résistance R_1 est choisie bien supérieure à l'impédance du haut-parleur, de sorte qu'on puisse considérer que l'amplitude du courant qui le traverse est constante, ce que nous avons contrôlé expérimentalement. Néanmoins, afin de ne pas trop limiter l'amplitude de vibration de la membrane, on ne peut pas augmenter beaucoup plus la valeur de la résistance R_1 . L'amplitude de vibration de la membrane est très inférieure à la longueur d'onde $\lambda_0 = 2,8 \text{ cm}$ de l'onde centimétrique. On peut donc linéariser l'expression (1), qui devient :

$$\varepsilon(t) = 2\varepsilon_0 \left[1 + \cos \left(2\pi\nu_0 \frac{\delta_0}{c} \right) - \left(\frac{4\pi\nu_0}{c} x(t) \right) \sin \left(2\pi\nu_0 \frac{\delta_0}{c} \right) \right] \quad (6)$$

Le signal délivré par le récepteur contient donc une composante continue et une composante sinusoïdale dont l'amplitude est proportionnelle à celle de la membrane. Afin d'améliorer la sensibilité du dispositif, on a intérêt à faire en sorte que la position de la membrane au repos corresponde à un éclairage égal à la moyenne des éclairages maximum et minimum. Cette situation correspond à $\left| \sin \left(2\pi\nu_0 \frac{\delta_0}{c} \right) \right| = 1$. Ce réglage, tout comme le soin apporté à la réalisation de l'interféromètre dans son ensemble, doit être fait de façon minutieuse afin d'obtenir la meilleure dynamique du signal possible.

L'amplitude de la composante sinusoïdale du signal délivré par le détecteur est mesurée à l'aide d'un multimètre en mode AC. L'étalonnage du dispositif, permettant de relier le déplacement à la tension mesurée, nous semble pratiquement impossible à réaliser. Nous ne pouvons donc malheureusement mesurer que des variations relatives de l'amplitude de vibration de la membrane.

3.3.2. Résultats

La courbe de la figure 4 (cf. page ci-contre) représente les variations relatives de

l'amplitude de déplacement de la membrane en fonction de la fréquence et leur ajustement par le modèle théorique correspondant à l'équation (4), avec une amplitude de courant constante. On note $A(f)$ l'amplitude du déplacement à la fréquence f , donnée par la relation (7) :

$$A(f) = \frac{A_0}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{f}{f_0}\right)^2\right]^2 + \left[\frac{f}{Qf_0}\right]^2}} \quad (7)$$

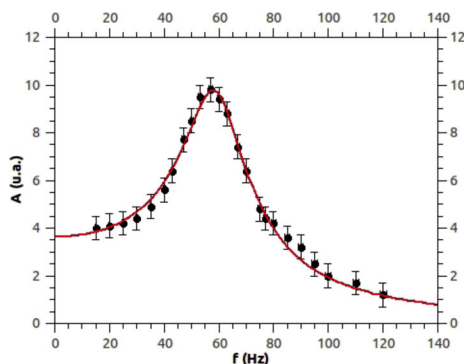


Figure 4 : Amplitude de vibration de la membrane A (en unités arbitraires) en fonction de la fréquence f .

Nos mesures sont en très bon accord avec le modèle théorique ($\chi^2_{\text{réduit}} = 0,52$). La procédure d'ajustement fournit les valeurs suivantes (la valeur de A_0 est sans intérêt) :

$$Q = 2,64 \pm 0,07 \quad \text{et} \quad f_0 = (60,0 \pm 0,3) \text{ Hz} \quad (8)$$

Les valeurs obtenues sont compatibles avec celles obtenues pour l'étude de l'impédance électrique (équations (5)). Le lecteur pourra retrouver en annexe le détail des manipulations permettant la détermination de l'ensemble des paramètres physiques suivants : R , L , m , k , μ et $Bl = 2\pi NaB$.

CONCLUSION

Nous avons présenté dans cet article un capteur de mouvement constitué d'un interféromètre de Michelson, éclairé par une onde électromagnétique centimétrique. Sa mise en œuvre dans le cadre d'une activité expérimentale en CPGE reste assez simple, permet de réaliser des mesures précises et présente un intérêt pédagogique manifeste. L'expérience de vélocimétrie à effet Doppler que nous avons présentée permet de souligner les analogies entre le traitement d'un signal électronique ou optique. Ce dispositif permet aussi d'étudier complètement la réponse harmonique d'un haut-parleur électrodynamique, et de

valider le modèle développé en cours. Une telle activité expérimentale fait appel à des connaissances variées : optique, électromagnétisme, mécanique, électrocinétique et permet d'illustrer la puissance et la richesse des concepts de la physique.

BIBLIOGRAPHIE ET NETOGRAPHIE

- [1] DOURLENT M. et PTAK M. « Application de l'effet Doppler à la mesure de la vitesse d'un mobile ». *Bull. Un. Phys.*, juillet-août-septembre 1975, vol. 69, n° 576, p. 1157-1161.
- [2] PONCET L. « Vélocimétrie laser à effet Doppler ». *Bull. Un. Phys.*, mars 1996, vol. 90, n° 782, p. 571-588.
- [3] FORTUNATO G. « L'interféromètre de Michelson, quelques aspects théoriques et expérimentaux ». *Bull. Un. Phys.*, juin 1997, vol. 91, n° 795 (2), p. 15-56 et juin 1998, vol. 92, n° 805 (2), p. 213-214.
- [4] LECARDONNEL J.-P. « Interféromètre de Michelson, quelques idées simples ». *Bull. Un. Phys.*, juin 1997, vol. 91, n° 795 (2), p. 5-14.
- [5] JOUANISSON R. « Travaux pratiques sur les franges d'YOUNG en ondes centimétriques ». *Bull. Un. Phys.*, juin 1989, vol. 83, n° 715, p. 789-793.
- [6] LANGOUET L. « Diffraction des ondes centimétriques par un macrocristal ». *Bull. Un. Phys.*, octobre 1969, vol. 64, n° 518 (1), p. 69-74.
- [7] BAIMA Y., JORANDON A., MORLEN S. et VINCENT M. « Changement de fréquence, effet Doppler ». *Bull. Un. Phys.*, mai 1998, vol. 92, n° 804, p. 869-884.
- [8] Académie d'Amiens - Sciences physiques et chimiques fondamentales et appliquées :
http://spcfa.ac-amiens.fr/sites/spcfa.ac-amiens.fr/IMG/pdf/HautParleurPC_06_2011.pdf
- [9] MOREAU R. « Le haut-parleur du physicien et celui du futur élève de seconde ». *Bull. Un. Phys.*, mai 1992, vol. 86, n° 744, p. 655-675.
- [10] DE IZARRA C. « Interférométrie laser et franges temporelles ». *Bull. Un. Phys.*, février 2002, vol. 96, n° 841 (2), p. 53-57.
- [11] SANZ M.-N. (Dir.). *Physique tout-en-un 2^e année PC-PSI*. Paris : Dunod, 2004. p. 1682.
- [12] OLIVIER S. *Physique 2^e année PC-PC**. Paris : Tec & Doc, Lavoisier, 2009, p. 756.
- [13] ALLARD R. « Relation entre le mouvement de la membrane d'un haut-parleur et la tension aux bornes d'un microphone ». *Bull. Un. Phys.*, février 1994, vol. 88, n° 761, p. 273-284.

Annexe

Détermination de l'ensemble des paramètres caractéristiques du haut-parleur

A - Décalage de la fréquence de résonance

Le modèle théorique du haut-parleur électrodynamique montre que le comportement du haut-parleur est piloté par les paramètres physiques suivants : R , L , m , k , μ et $Bl = 2\pi NaB$. Les valeurs de R et L ont été déterminées. La connaissance de R_m , f_0 et Q ne suffit pas à déterminer les quatre paramètres restants. Une expérience complémentaire est nécessaire. Nous avons recherché la valeur de la fréquence de résonance de la membrane, que nous assimilons à f_0 , lorsque la membrane est surchargée par une masse δm .

L'équation (7) montre que la fréquence propre f_0 ne correspond pas exactement à la fréquence de résonance $f_r = f_0 \sqrt{1 - 1/(2Q^2)}$. Avec un facteur de qualité voisin de 3, la confusion de f_0 et f_r correspond à une erreur relative voisine de 10 %. Nous utilisons cette valeur pour déterminer l'incertitude sur la fréquence propre lorsqu'elle est supérieure à l'incertitude liée au pointé de la résonance. Pour la membrane surchargée, nous écrivons donc :

$$f'_0 = \frac{f_0}{\sqrt{1 + \frac{\delta m}{m}}} \quad (9)$$

avec $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$. La figure 5 (cf. page ci-après) représente les fréquences de résonance mesurées et l'ajustement par l'équation (9), où la valeur de la fréquence propre est imposée en prenant la valeur moyenne des deux ajustements précédents :

$$f_0 = (60,2 \pm 0,4) \text{ Hz.}$$

Là encore, l'accord entre les mesures et la modélisation théorique est tout à fait satisfaisant. La procédure d'ajustement livre la valeur suivante de la masse de l'ensemble mobile :

$$m = (9,0 \pm 0,6) \text{ g} \quad (10)$$

B - Valeurs des paramètres du modèle

Les valeurs de la fréquence propre f_0 , de la masse m de l'ensemble mobile, du facteur de qualité Q et de la résistance R_m permettent de déterminer toutes les valeurs numé-

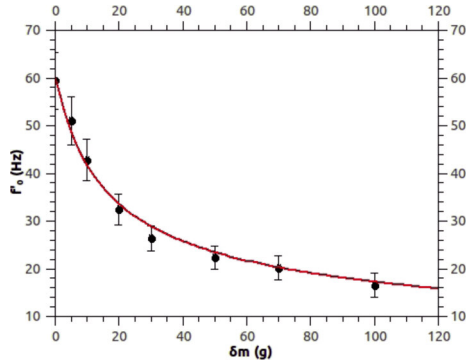


Figure 5 : Fréquence de résonance en fonction de la surcharge.

riques des paramètres physiques qui interviennent dans le modèle théorique du haut-parleur.

Comme pour la fréquence propre f_0 , nous choisissons, pour le facteur de qualité Q , de prendre la valeur moyenne des valeurs ajustées (équations (5) et (8)).

Au final, les mesures que nous proposons permettent de déterminer, pour le haut-parleur étudié, les valeurs numériques suivantes :

- ◆ Résistance électrique : $R = (9,27 \pm 0,09) \Omega$
- ◆ Auto-inductance : $L = (3,35 \pm 0,52) \text{ mH}$
- ◆ Masse : $m = (9,0 \pm 0,6) \text{ g}$
- ◆ Constante de raideur : $k = (1,29 \pm 0,09) \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$
- ◆ Coefficient de frottement : $\mu = (1,30 \pm 0,10) \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$
- ◆ Coefficient de couplage électromécanique : $Bl = (4,20 \pm 0,16) \text{ N} \cdot \text{A}^{-1}$

Les incertitudes des paramètres dérivés ont été évaluées en utilisant la formule de propagation des erreurs. Les valeurs numériques obtenues permettent de fixer quelques ordres de grandeur :

- ◆ Amplitude maximale de vibration :

$$A_0 = \frac{Bl}{k} I_0 \sim 0,2 \text{ mm} \quad \text{pour } I_0 = 50 \text{ mA}$$

- ◆ Amplitude maximale de l'accélération de la membrane:

$$A_0 \omega_0^2 \sim 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

On vérifie *a posteriori* que l'amplitude de déplacement de la membrane est bien négligeable devant la longueur d'onde. L'ordre de grandeur de l'amplitude de l'accélération

(correspondant à 2g), justifie qu'il est bien nécessaire de fixer solidement la masselotte en surcharge lors de l'étude du décalage de la fréquence de résonance !

Afin de préserver le matériel accessible à nos élèves, nous n'avons pas pu par contre dérouler la bobine afin d'évaluer sa longueur et par suite, grâce à la valeur de la constante de couplage électromécanique, l'intensité du champ magnétique.



François VANDENBROUCK
*Professeur de physique en PC**
Lycée Louis-le-Grand
Paris 5^e



Muriel DUNLOP
*Professeur de physique en MP**
Lycée Louis-le-Grand
Paris 5^e



Alain LE RILLE
Professeur de physique en PC
Lycée Janson de Sailly
Paris 16^e