

# Equations différentielles Ordinaires

Une grande part des problèmes scientifiques voient leur modélisation déboucher sur une (ou plusieurs) équation(s) différentielle(s) en fonction de la variable temps (évolution du système), et/ou de variables spatiales. Lorsqu'une seule variable est en jeu (temps  $t$ , une coordonnée de l'espace), on parle d'*Equation Différentielle Ordinaire (ODE)*. Dans le cas très fréquent en physique où plusieurs variables entrent en jeu (champs scalaires ou vectoriels fonction de l'espace et du temps<sup>1</sup>), on parle d'*Equation aux Dérivées Partielles (PDE)*. C'est le cas par exemple des phénomènes ondulatoires. Ce cours sera restreint aux ODE, et nous aborderons les EDP en SPE.

Quand l'équation est simple (linéaire d'ordre  $n$ , à variables séparables...) ou peut s'y ramener (équations de *Bernoulli*, de *Ricatti*, de *Lagrange*...), la résolution analytique est possible, à condition que le second membre soit suffisamment simple. Toutefois, le contexte expérimental introduit souvent des données échantillonnées au second membre (ou dans les coefficients), ce qui impose un traitement numérique. Par ailleurs, nombre de modélisations conduisent à des équations non linéaires pour lesquelles aucune solution analytique n'est connue. Ce cours présente des méthodes pour en déterminer une solution approchée. On exposera ici exclusivement la méthode d'EULER, puis celle du POINT MILIEU, qui en est une sophistication à moindre coût. Des méthodes plus performantes seront accessibles en utilisant la bibliothèque dédiée `scipy.integrate` (fonction `odeint`).

On commence par montrer que toutes les EDO ou systèmes d'EDO de tous ordres peuvent se mettre sous la forme d'une EDO **vectorielle du premier ordre**<sup>2</sup>, ce qui permet de leur appliquer les mêmes méthodes. Ensuite on rappelle le cadre mathématique permettant d'obtenir l'**existence et l'unicité** d'une solution. Lorsque l'on tente d'approcher cette solution par une méthode numérique, différents problèmes se posent :

- L'approximation choisie doit être assez précise pour que la solution approchée **converge** vers la solution exacte : diminuer le pas d'intégration  $h$  fait tendre l'**erreur** vers 0, d'autant plus vite que l'**ordre**  $p$  est grand ( $O(h^p)$ );
- Pour cela, la méthode numérique doit nécessairement être **stable**, c'est-à-dire que la solution approchée ne doit pas diverger sous l'effet des erreurs d'arrondis inhérentes à l'utilisation des flottants à la place des réels.

1. Mécaniques des milieux continus dont les fluides, thermodynamique, électromagnétisme, mécanique quantique, théorie quantique des champs...

2. Par commodité, on notera les vecteurs en gras et horizontalement :  $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$ .

- La méthode doit être efficace en terme de **temps de calcul** : ne pas requérir un pas exagérément petit, c'est-à-dire un nombre d'itérations exagérément grand, pour une précision donnée.

L'exemple élémentaire qui servira de support pour le cours est l'EDO suivante<sup>3</sup>, notée  $(E_0)$  dont la solution exacte  $y_e(t)$  est connue :

$$(E_0) : \boxed{\tau \dot{y}(t) + y(t) = 0 \quad \text{avec} \quad y(0) = 1} \quad \text{qui conduit à} \quad \boxed{y_e(t) = e^{-t/\tau}}.$$

## I. Résultats fondamentaux sur les EDO

### I.1. Une EDO est toujours du premier ordre... !

**DÉFINITION : Equation différentielle ordinaire du premier ordre**<sup>a</sup>  
 Soit un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$  et une application  $\mathbf{F} : U \mapsto \mathbb{R}^m$  **continue**.  
 On considère l'équation différentielle

$$\mathbf{Y}'(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{Y}(t)) \quad (E)$$

On appelle solution de  $(E)$  sur l'intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  une application **dérivable**  $\mathbf{Y} : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  telle que  $\forall t \in I$  on ait  $(t, \mathbf{Y}(t)) \in U$ , et vérifiant  $(E)$  pour tout  $t \in I$ .

---

a. Dans la suite, la variable  $t$  représente aussi bien le temps que n'importe quelle autre variable (coordonnée notamment). Sauf cas particulier, le symbole  $'$  est utilisé pour désigner de façon générale la dérivation par rapport à cette variable  $t$ .

**Exemples** : (on omet d'écrire la variable  $t$  pour alléger...)

- Problèmes scalaires du premier ordre ( $m = 1$ ) :

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\tau} (u(t) - u_\infty) \quad \longrightarrow \quad Y(t) = u(t) \quad \text{et} \quad Y'(t) = -\frac{1}{\tau} (Y(t) - u_\infty)$$

$$\frac{dp}{dz}(z) = -\frac{Mg}{RT(z)} p(z) \quad \longrightarrow \quad Y(z) = p(z) \quad \text{et} \quad Y'(z) = -\frac{Mg}{RT(z)} Y(z)$$

3. Par la suite on prendra soin d'*adimensionner* les équations différentielles avant de les résoudre numériquement, pour limiter éviter les problèmes de dépassement de capacité dans la représentation des nombres en machine.

- Problème vectoriel 2D du premier ordre ( $m = 2$ ) :  
Mouvement avec frottement quadratique.

$$\begin{cases} \dot{v}_x = -\alpha \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \cdot v_x \\ \dot{v}_y = -\alpha \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \cdot v_y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{Y} = (Y_1, Y_2) = (v_x, v_y) \\ \mathbf{Y}' = -\alpha \|\mathbf{Y}\| \cdot (Y_1, Y_2). \end{cases}$$

- Problème scalaire du second ordre ( $m = 2$ ) :  
Chute libre dans le champ de pesanteur avec vitesse initiale verticale :

$$\ddot{z} = -g \rightarrow \begin{cases} \mathbf{Y} = (Y_1, Y_2) = (z, \dot{z}) \\ \mathbf{Y}' = (Y_2, -g). \end{cases}$$

Pendule :

$$\ddot{\theta} = -\omega_0^2 \sin \theta \rightarrow \begin{cases} \mathbf{Y} = (Y_1, Y_2) = (\theta, \dot{\theta}) \\ \mathbf{Y}' = (Y_2, -\omega_0^2 \sin Y_1). \end{cases}$$

- Problème vectoriel 2D du second ordre ( $m = 4$ ) :  
Système masse-ressort en mouvement plan sans frottement.

$$\begin{cases} \ddot{x} = -k(\ell - \ell_0) \frac{x}{\ell} = -k(1 - \frac{\ell_0}{\ell})x \\ \ddot{y} = -k(\ell - \ell_0) \frac{y}{\ell} = -k(1 - \frac{\ell_0}{\ell})y \end{cases} \text{ avec } \ell = \sqrt{x^2 + y^2}$$

On pose  $\mathbf{Y} = (x, y, \dot{x}, \dot{y})$  et

$$\mathbf{Y}' = \left( Y_3, Y_4, -k \left( 1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{Y_1^2 + Y_2^2}} \right) Y_1, -k \left( 1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{Y_1^2 + Y_2^2}} \right) Y_2 \right).$$

## I.2. Problème de Cauchy : existence des solutions

DÉFINITION : Un **problème de Cauchy** est une EDO du premier ordre munie d'une **condition initiale**  $\mathbf{Y}(t_0) = \mathbf{Y}_0$  imposée.

THÉORÈME : **Existence des solutions**

Un problème de Cauchy admet au moins une solution.

REMARQUE : Pour une EDO scalaire d'ordre  $n$  en la fonction  $y(t)$ , le vecteur  $\mathbf{Y} = (y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$  contient les dérivées d'ordre 0 à  $n-1$ . Donc le problème de Cauchy requiert la connaissance au temps  $t_0$  de  $y(t_0)$  et de ses  $n-1$  premières dérivées :  $\mathbf{Y}(t_0) = (y(t_0), y'(t_0), \dots, y^{(n-1)}(t_0))$ .

## I.3. Unicité de la solution

Il ne suffit pas toujours de donner une condition initiale pour disposer d'une solution unique, ce qui peut être déroutant. Heureusement il existe une condition suffisante pour obtenir l'unicité, mais requiert d'être un peu plus contraignant sur la fonction  $\mathbf{F}$ .

DÉFINITION :  $\mathbf{F}$  est localement **lipschitzienne** en  $\mathbf{Y}$

$\forall (t_0, \mathbf{Y}_0 = \mathbf{Y}(t_0)) \in U$ , il existe  $k = k(t_0) \geq 0$  et un compact  $C_0 \subset U$  contenant  $(t_0, \mathbf{Y}_0)$  tels que :

$$\forall (t, \mathbf{Y}_1) \in C_0, \forall (t, \mathbf{Y}_2) \in C_0, \quad \|\mathbf{F}(t, \mathbf{Y}_1) - \mathbf{F}(t, \mathbf{Y}_2)\| \leq k \|\mathbf{Y}_1 - \mathbf{Y}_2\|$$

THÉORÈME : **Cauchy-Lipschitz**

Si  $\mathbf{F}$  est localement lipschitzienne en  $\mathbf{Y}$ , alors le problème de Cauchy de condition initiale  $(t_0, \mathbf{Y}_0)$  admet une unique solution.

REMARQUES :

- Une condition suffisante pour que  $\mathbf{F}$  soit localement lipschitzienne est qu'elle soit de classe  $\mathcal{C}^1$ .
- Un corollaire de ce théorème est que deux solutions démarrant avec deux conditions initiales distinctes n'auront jamais aucun point commun. Autrement dit les *courbes intégrales*<sup>4</sup> ne se croisent jamais.

## II. Exemples de méthodes numériques à 1 pas

L'objectif est d'obtenir une solution approchée au problème de Cauchy pour une discrétisation temporelle

$$t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = t_0 + T$$

de l'intervalle  $[t_0, t_0 + T]$  sur lequel on souhaite résoudre l'équation. La fonction  $\mathbf{F}(t, \mathbf{Y})$  traduit l'évolution de  $\mathbf{Y}$ , c'est-à-dire sa pente. Bien que les propos qui suivent sont applicables de façon générale au cas d'un pas de temps  $h_n = t_{n+1} - t_n$  variable<sup>5</sup>, on se restreint pour simplifier au cas d'un pas de temps constant :

$$h = t_{n+1} - t_n$$

4. Les courbes intégrales sont simplement les ensembles de points  $M(t)$  dont les coordonnées sont celles du vecteur  $\mathbf{Y}(t)$  solution de l'équation (E). Dans le cas où  $\mathbf{Y}(t)$  est scalaire il s'agit de courbes du plan.

5. C'est parfois indispensable, notamment pour aborder une discontinuité.

Dans cette partie, on présente ici les méthodes les plus simples, qui appartiennent à la catégorie plus générale des méthodes à 1 pas (cf section ??). Elles reposent sur une **approximation de la dérivée par différence finie avant d'ordre 1**. Ainsi, en notant  $\mathbf{Y}_k = \mathbf{Y}(t_k)$ , à l'instant  $t_n$  on a :

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt}(t_n) \simeq \frac{\mathbf{Y}_{n+1} - \mathbf{Y}_n}{h}.$$

Les méthodes à 1 pas diffèrent ensuite par la façon d'évaluer approximativement le second membre du problème de Cauchy :  $\mathbf{F}(t, \mathbf{Y}(t))$ .

## II.1. Méthode d'Euler (explicite)

### a. Principe

Le second membre est simplement évalué au temps  $t_n$ . Ainsi, la pente permettant de passer de  $\mathbf{Y}_n$  à  $\mathbf{Y}_{n+1}$  est  $\mathbf{F}(t_n, \mathbf{Y}_n)$  :

$$\frac{\mathbf{Y}_{n+1} - \mathbf{Y}_n}{h} = \mathbf{F}(t_n, \mathbf{Y}_n)$$

Ainsi, on obtient la récurrence

$$\mathbf{Y}_{n+1} = \mathbf{Y}_n + h\mathbf{F}(t_n, \mathbf{Y}_n)$$

### b. Application

L'application du schéma d'Euler (explicite) au problème ( $E_0$ ) conduit à la récurrence

$$Y_{n+1} = \left(1 - \frac{h}{\tau}\right) Y_n$$

qui est une progression géométrique de raison  $1 - \frac{h}{\tau}$ . Le choix du pas d'intégration va donner lieu à divers comportements qui sont réunis dans les courbes de la Fig. 1 pour une intégration sur l'intervalle de temps  $[0, 10]$ . On constate que :

- si  $\frac{h}{\tau} \geq 2$ , la méthode est instable et/ou ne convergera pas vers la valeur attendue ;
- si  $1 < \frac{h}{\tau} < 2$ , la méthode converge lentement en oscillant autour de la valeur ;
- si  $0 < \frac{h}{\tau} < 1$ , la méthode converge et l'erreur est d'autant plus faible que le pas de temps est petit.

Ci-dessous on présente les solutions pour des résolutions de plus en plus fines. Le programme utilisé pour produire ce graphe est présenté ci-dessous.

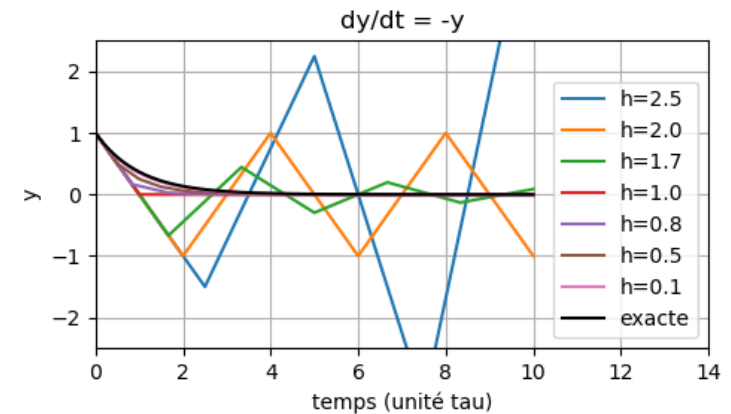


FIGURE 1 – Résolutions numériques de  $\dot{y}(t) + y(t) = 0$  avec  $y(0) = 1$  pour le schéma d'Euler explicite.

```

1 # second membre du problème de cauchy
2 def cauchy_1d(y,t):
3     """ Calcule le second membre du probleme de Cauchy 1D:
4     y' = f(y,t) """
5     return -y # équation y' = -y
6
7 def euler_1d(f,y0,t0,t1,N):
8     """ Resoud le probleme de Cauchy 1D (ED du 1er Ordre)
9     y' = f(y,t):
10    _avec f donnée en argument,
11    _sur l'intervalle [t0,t1],
12    _avec pour condition initiale y(t0) = y0,
13    _en N pas de temps.
14    Renvoie: les vecteurs des instants et des valeurs de y
15    a ces instants. """
16    h = (t1-t0)/N # définition du pas de temps
17    # méthode avec des listes
18    t = t0
19    y = np.copy(y0) # vraie copie pour que y0 ne soit pas
20                    # modifiée si on s'en ressert un peu plus loin dans la
fonction

```

```

21 list_t = [t0]
22 list_y = [y0]
23 for i in range(N):
24     y = y + h*f(y,t) # Pas d'Euler
25     list_y = list_y + [y]
26     t = t + h
27     list_t = list_t + [t]
28 return np.array(list_t),np.array(list_y) # on renvoie des
array pour plot ensuite
29
30 # Condition initiale et domaine temporel :
31 y0,t0,t1 = 1,0,10
32 # Graphe
33 plt.figure(1,figsize=[5,3])
34 for N in [4, 5, 6, 10, 12, 20, 100]: # on augmente la résolution
35     sol_euler = euler_1d(cauchy_1d,y0,t0,t1,N) #résolution nu-
mérique
36     yy = sol_euler[1] # solution numérique Euler
37     tt = sol_euler[0] # axe des temps
38     plt.plot(tt,yy,label='h='+format((t1-t0)/N, '.1f'))
39 tt = np.linspace(t0,t1,100)
40 yy_ex = y0*np.exp(-tt) # Solution exacte : y' = -y
41 plt.plot(tt,yy_ex,color='black',label='exacte')
42 plt.xlabel('temps (unite_tau)')
43 plt.ylabel('y')
44 plt.xlim((0,14))
45 plt.ylim((-2.5,2.5))
46 plt.title('dy/dt = -y')
47 plt.legend(loc='lower_right')
48 plt.grid()
49 plt.tight_layout()
50 plt.savefig('cn3_1.png')
51 plt.show()

```

Pour évaluer quantitativement les performances de la méthode, on doit quantifier l'erreur par rapport à la solution exacte.

## II.2. Erreur de consistance et erreur globale

DÉFINITION : **Erreur de consistance (erreur locale)**

Soit  $\mathbf{Z}$  une **solution exacte** du problème de Cauchy. L'erreur de consistance est celle produite au cours d'une **itération** de la méthode numérique à un pas, à partir de la **valeur exacte**  $\mathbf{Y}_n = \mathbf{Z}(t_n)$  :

$$\mathbf{e}_n = \mathbf{Z}(t_{n+1}) - \mathbf{Y}_{n+1}$$

DÉFINITION : **Erreur globale**<sup>a</sup>

$$\max_{0 \leq n \leq N} |\mathbf{Y}_n - \mathbf{Z}(t_n)|$$

DÉFINITION : Une méthode est **convergente** si pour toute solution exacte  $\mathbf{Z}$ , l'erreur globale tend vers 0 quand  $h \rightarrow 0$  et  $\mathbf{Y}_0 - \mathbf{Z}(t_0) \rightarrow 0$ .

a. On notera  $||$  pour la valeur absolue d'un scalaire comme pour la norme d'un vecteur.

On illustre ces notions sur les figures ci-dessous.

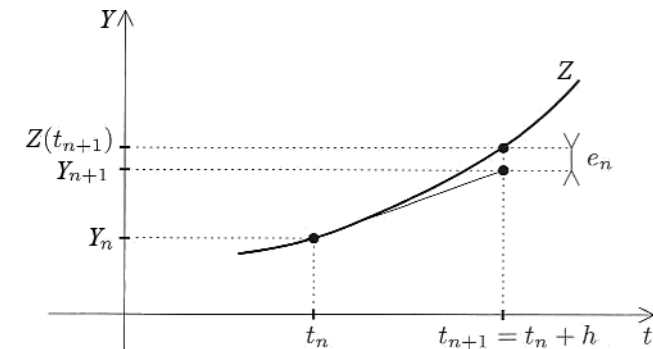


FIGURE 2 – Erreur de consistance dans le cas de la méthode d'Euler explicite.

Comme le montre le schéma ci-dessous, l'erreur de consistance n'a a priori que peu de rapport avec l'erreur globale. Toutefois, sous des hypothèses convenables de régularité, l'ordre de grandeur de la première permettra de connaître l'ordre de grandeur de la seconde (cf section III.1).

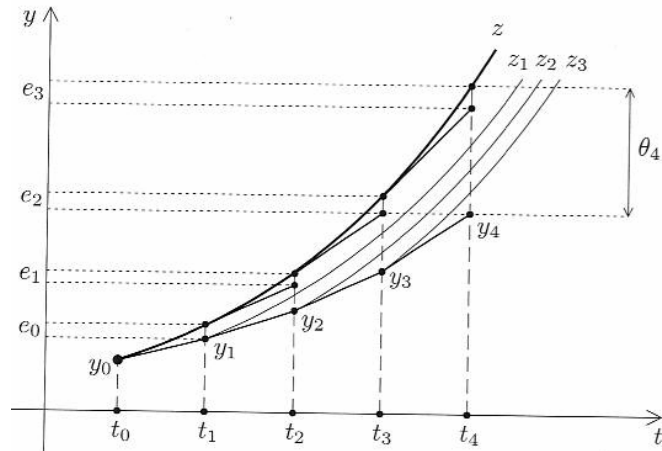


FIGURE 3 – Formation de l’erreur globale dans le cas de la méthode d’Euler explicite (les fonctions  $z$ ,  $z_1$ ,  $z_2$  et  $z_3$  représentent les solutions exactes passant par les points  $(t_0, y_0)$  et  $(t_j, y_j)$ ,  $j = 1, 2, 3$ ).

**Application à la méthode d’Euler (explicite)**

Le tableau suivant montre l’évolution de l’erreur globale et du temps de calcul.

$h$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$
$N$ pas de temps	$10^2$	$10^3$	$10^4$	$10^5$	$10^6$	$10^7$
Erreur globale	$4 \times 10^{-1}$	$5 \times 10^{-2}$	$5 \times 10^{-3}$	$5 \times 10^{-4}$	$5 \times 10^{-5}$	$5 \times 10^{-6}$
Temps (s)	$5 \times 10^{-3}$	$2 \times 10^{-2}$	$8 \times 10^{-2}$	$6 \times 10^{-1}$	5	50

- L’erreur globale évolue linéairement en fonction du pas de temps  $h$ . On parle alors de **méthode d’ordre 1**. Il faut descendre à un pas de temps très faible avant d’obtenir un niveau d’erreur satisfaisant.
- Le temps de calcul évolue linéairement avec  $h$  : la complexité est en  $O(N)$  car il y a une seule boucle.

**II.3. Méthode du point milieu**

La méthode du point milieu consiste à évaluer la pente entre les deux points par une valeur proche de la pente de la corde, à savoir **la pente évaluée au**

**milieu de l’intervalle**, ce qui donne la récurrence suivante :

$$\mathbf{Y}_{n+1} = \mathbf{Y}_n + h \mathbf{F} \left( t_n + \frac{h}{2}, \mathbf{Y}_n + \frac{h}{2} \mathbf{F}(t_n, \mathbf{Y}_n) \right)$$

On voit ainsi que le principe repose sur la **construction d’un point intermédiaire** entre les points  $n$  et  $n + 1$ , qu’on notera symboliquement  $n + \frac{1}{2}$  :

- l’instant intermédiaire est choisi au milieu :

$$t_{n+\frac{1}{2}} = t_n + \frac{h}{2} = \frac{1}{2} (t_n + t_{n+1})$$

- la valeur de la fonction à cet instant est approchée comme dans la méthode d’Euler :

$$\mathbf{Y}_{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{Y}_n + \frac{h}{2} \mathbf{F}(t_n, \mathbf{Y}_n)$$

L’avantage de cette évaluation plus précise de la dérivée  $\mathbf{Y}'$  est d’obtenir une **méthode d’ordre plus élevé, sans avoir à connaître les dérivées successives de  $\mathbf{F}$** . On peut montrer que la méthode du point milieu est **d’ordre 2**, contrairement à celle d’Euler, qui est d’ordre 1.

**II.4. Choix du pas**

Le choix du pas d’intégration  $h$  répond à plusieurs contraintes contradictoires :

- pour une méthode d’ordre donné  $p$ , **plus le pas  $h$  est petit**, plus l’erreur de consistance (locale) sera faible.
- pour un domaine d’intégration fixé, **plus le pas  $h$  est petit**, plus le nombre d’étapes de calcul est élevé, donc **plus les erreurs d’arrondi cumulées sont importantes**.
- pour un domaine d’intégration fixé, **plus le pas  $h$  est petit**, plus le nombre d’étapes de calcul est élevé, donc **plus le temps de calcul est long**.

Notamment, il est remarquable qu’en général, l’erreur globale commence par **décroître lorsque  $h$  décroît, puis se met à augmenter en dessous d’un certain pas  $h_0$  optimal. Il n’est donc pas toujours judicieux de réduire le pas.**

### Critère de Shannon

En pratique, le choix du pas détermine une frontière pour la dynamique représentable, c'est-à-dire **les fréquences (temporelles ou spatiales) que l'on peut résoudre**. Cette limite est donnée, dans le cas d'un pas constant  $h$ , par le *critère de Shannon* :

$$f_{\max} = \frac{1}{2} f_e = \frac{1}{2h}$$

Typiquement, on fait en sorte d'avoir toujours au moins 10 points par période pour pouvoir évaluer correctement les variations à une certaine fréquence.

En pratique, le choix du pas de temps fait souvent appel à une démarche empirique et demande de l'expérience.

### Contrôle du pas : méthodes à pas variable $h_n$

Il est souvent difficile de prévoir le pas  $h_{\max}$  à ne pas dépasser pour que l'erreur globale ne dépasse pas une tolérance fixée  $\varepsilon$ . L'utilisation d'algorithmes à pas variables<sup>6</sup> présente de ce point-de-vue des avantages majeurs.

- En utilisant une méthode d'estimation<sup>7</sup> à la volée de l'erreur de consistance  $e_n$ , on peut adapter le pas  $h_n$  en cours d'intégration.
- L'approche d'une discontinuité ou d'une singularité de l'équation différentielle ne peut se faire en général qu'avec une réduction importante du pas. Dans cette circonstance, il convient d'arrêter l'algorithme avant de traverser la discontinuité, faute de quoi les erreurs deviennent imprévisibles. Le calcul du pas  $h_n$  à appliquer sert alors de test d'arrêt.

## III. Applications

On profite maintenant du programme écrit ci-dessus pour modifier simplement le second membre de l'équation différentielle, c'est-à-dire la fonction `cauchy_1d`. De nouveau on choisit des exemples pour lesquels on sait écrire simplement la solution particulière et donc la solution exacte, pour comparaison.

On commence par un second membre constant :

$$y' + y = 1 \quad \Rightarrow \quad y(t) = 1 + (y_0 - 1)e^{-t}.$$

6. On généralise les méthodes présentées précédemment en utilisant un pas variable  $h_n$ .

7. On ne peut connaître exactement l'erreur de consistance puisqu'on ne connaît en général pas la solution exacte de façon analytique.

```
1 def cauchy_1d(y, t):
2     return -y+1 # équation y' = -y+1
```

On poursuit par un second membre en forme de *rampe* :

$$y' + y = t \quad \Rightarrow \quad y(t) = t - 1 + (y_0 + 1)e^{-t}.$$

```
1 def cauchy_1d(y, t):
2     return -y+t # équation y' = -y+t
```

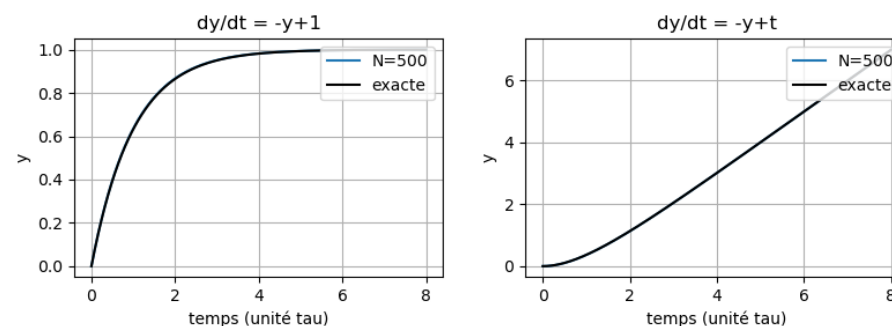


FIGURE 4 – Résolution numérique de  $y'(t) + y(t) = 1$  avec  $y(0) = 0$  (Euler explicite).  
FIGURE 5 – Résolution numérique de  $y'(t) + y(t) = t$  avec  $y(0) = 0$  (Euler explicite).

On termine par un second membre sinusoidal :

$$y' + y = \cos(2\pi t) \quad \Rightarrow \quad y(t) = \frac{\cos(2\pi t - \arctan(2\pi))}{\sqrt{1 + 4\pi^2}} + \left( y_0 - \frac{\cos(\arctan(2\pi))}{\sqrt{1 + 4\pi^2}} \right) \cdot e^{-t}.$$

```
1 def cauchy_1d(y, t):
2     return -y+cos(2*np.pi*t) # équation y' = -y+cos(2pit)
```

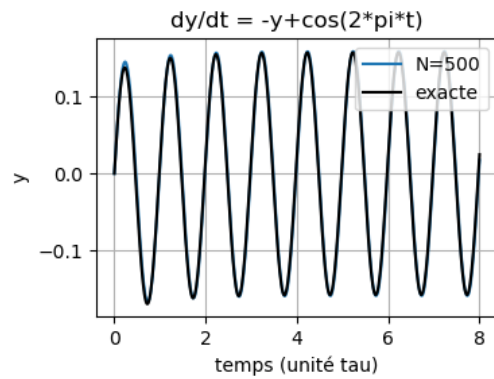


FIGURE 6 – Résolution numérique de  $\dot{y}(t) + y(t) = \cos(2\pi t)$  avec  $y(0) = 0$  (Euler explicite).

## ANNEXE - Résultats généraux sur les méthodes à 1 pas

### III.1. Méthodes consistantes, stables et convergentes

**DÉFINITION :** Une méthode est dite **consistante** si pour toute solution exacte  $\mathbf{Z}$  la somme des erreurs de consistance relatives à  $\mathbf{Z}$  tend vers 0 quand  $h$  (ou  $h_{\max}$ ) tend vers 0 :

$$\sum_{0 \leq n \leq N} |\mathbf{e}_n| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

Dans la pratique, le calcul récurrent des points  $\mathbf{Y}_n$  est entaché d'erreurs d'arrondi  $\varepsilon_n$ . Pour que les calculs soient significatifs, il est indispensable que la propagation de ces erreurs reste contrôlable.

**DÉFINITION :** Une méthode est dite **stable** s'il existe une constante  $S \geq 0$ , appelée *constante de stabilité*, telle que pour toutes les suites  $(\mathbf{Y}_n)$  et les suites *perturbées*  $(\tilde{\mathbf{Y}}_n)$  définies par

$$\mathbf{Y}_{n+1} = \mathbf{Y}_n + h \Phi(t_n, \mathbf{Y}_n, h) \quad 0 \leq n < N$$

$$\tilde{\mathbf{Y}}_{n+1} = \tilde{\mathbf{Y}}_n + h \Phi(t_n, \tilde{\mathbf{Y}}_n, h) + \varepsilon_n \quad 0 \leq n < N$$

on ait

$$\max_{0 \leq n \leq N} |\tilde{\mathbf{Y}}_n - \mathbf{Y}_n| \leq S (|\tilde{\mathbf{Y}}_0 - \mathbf{Y}_0| + \sum_{0 \leq n \leq N} |\varepsilon_n|).$$

**THÉORÈME :** Si une méthode est stable et consistante, alors elle est convergente.

**Démonstration** - On applique la définition de la stabilité à la suite  $(\tilde{\mathbf{Y}}_n) = (\mathbf{Z}(t_n))$  :  $\max_{0 \leq n \leq N} |\mathbf{Z}(t_n) - \mathbf{Y}_n| \leq S (|\mathbf{Z}(t_0) - \mathbf{Y}_0| + \sum_{0 \leq n \leq N} |\varepsilon_n|)$ .

La propriété de consistance permet de conclure.

### III.2. Propriétés importantes

**THÉORÈME : Condition nécessaire et suffisante de consistance**

La méthode à un pas définie par  $\mathbf{Y}_{n+1} = \mathbf{Y}_n + h \Phi(t_n, \mathbf{Y}_n, h)$  est consistante si et seulement si

$$\forall (t, \mathbf{Y}) \in [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}^m, \quad \Phi(t, \mathbf{Y}, 0) = \mathbf{F}(t, \mathbf{Y}).$$

**Démonstration** - Elle repose sur la continuité de  $\Phi \dots$

**THÉORÈME : Condition suffisante de stabilité**

Si la fonction  $\Phi$  est  $\Lambda$ -lipschitzienne en  $\mathbf{Y}$  sur  $[t_0, t_0 + T]$ , alors

— la méthode est stable ;

— on peut prendre pour constante de stabilité  $S = e^{\Lambda T}$ .

### III.3. Notion d'ordre

**DÉFINITION :** Une méthode à un pas est dite **d'ordre**  $\geq p$  si pour toute solution exacte  $\mathbf{Z}$  de l'équation différentielle

$$\mathbf{Y}'(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{Y}(t)) \quad \text{où } \mathbf{F} \text{ est de classe } \mathcal{C}^p,$$

il existe une constante  $C \geq 0$  telle que l'erreur de consistance relative à  $\mathbf{Z}$  vérifie

$$|\mathbf{e}_n| \leq C h_n^{p+1}, \quad \forall n, \quad 0 \leq n < N.$$

La méthode est dite d'ordre  $p$  (exactement) si elle est d'ordre  $\geq p$  mais pas d'ordre  $\geq p + 1$ .

**THÉORÈME :** Une méthode est consistante si et seulement si elle est d'ordre  $p \geq 1$ .

**PROPRIÉTÉ : Majoration de l'erreur globale**

Si la méthode est stable de constante de stabilité  $S$ , alors

$$\max_{0 \leq n \leq N} |\mathbf{Z}(t_n) - \mathbf{Y}_n| \leq S (|\mathbf{Z}(t_0) - \mathbf{Y}_0| + CT h^p)$$

où  $C$  est une constante liée à la norme des dérivées d'ordre  $p$  de  $\mathbf{F}$  et  $\Phi$ .

L'erreur initiale  $|\mathbf{Z}(t_0) - \mathbf{Y}_0|$  est généralement négligeable. **L'erreur globale donnée par une méthode stable d'ordre  $p$  est donc de l'ordre de grandeur de  $h^p$ , avec une constante de proportionnalité  $SCT$ .** Il est donc intéressant

d'augmenter l'ordre de la méthode, à condition que les fonctions  $\mathbf{F}$  et  $\Phi$  soient suffisamment régulières.

### III.4. Application à la méthode d'Euler (explicite)

**Consistance :**

→ L'erreur de consistance est  $\mathbf{e}_n = \mathbf{Z}(t_{n+1}) - \mathbf{Z}(t_n) - h\mathbf{F}(t_n, \mathbf{Z}(t_n))$ .

→ Or le développement de Taylor-Lagrange donne :  $\mathbf{Z}(t_n + h) = \mathbf{Z}(t_n) + h\dot{\mathbf{Z}}(t_n) + \frac{h^2}{2}\ddot{\mathbf{Z}}(\xi)$  avec  $\xi \in [t_n, t_n + h]$ .

→ D'autre part  $\dot{\mathbf{Z}} = \Phi(t_n, \mathbf{Z}(t_n), h) = \mathbf{F}(t_n, \mathbf{Z}(t_n))$ .

→ On en déduit que  $\mathbf{e}_n = \frac{h^2}{2}\ddot{\mathbf{Z}}(\xi)$  avec  $\xi \in [t_i, t_i + h]$ , ou

$$\mathbf{e}_n = \frac{h^2}{2}\ddot{\mathbf{Z}}(t_n) + o(h_n^2).$$

Ainsi la méthode est d'ordre 1. Elle est donc consistante.

**Stabilité :** Si  $\Phi$  est lipschitzienne, alors le schéma est stable.

**Convergence :** La méthode étant consistante, et stable si  $\Phi$  est lipschitzienne en  $\mathbf{Y}$ , alors elle est **convergente si  $\Phi$  est lipschitzienne en  $\mathbb{Y}$ .**

### III.5. Application à la méthode du point milieu

**Consistance :** on peut montrer que la méthode du point milieu est **d'ordre 2**, contrairement à celle d'Euler, qui est d'ordre 1. Elle est donc **consistante**.

**Stabilité et Convergence :** La méthode étant consistante, **si  $\Phi$  est lipschitzienne en  $\mathbf{Y}$** , alors elle est stable et elle converge.