Oscillateurs amortis en régime libre

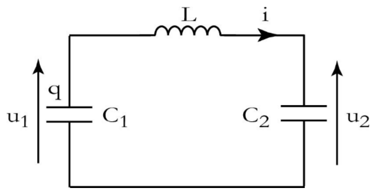
EX 1 – Questions de cours

1. Etablir la solution générale de l'équation différentielle
$$\ddot{x} + \frac{3}{\tau}\,\dot{x} + \frac{1}{\tau^2}\,x = 0\,.$$

2. Un circuit est constitué uniquement de deux résistances, deux inductances, et trois capacités. Un élève obtient pour ce circuit l'équation différentielle suivante pour le courant dans une branche :
$$L_1C_1\,\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \left(R_2C_2 - \frac{L_2}{R_2}\right)\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{C_3}{C_2}\,i = 0\,.$$
Que doit-on en conclure ?

EX 2 – Circuit oscillant

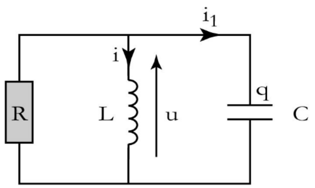
Soit le montage ci-dessous. à l'instant $t = 0$, un condensateur de capacité C_1 et de charge initiale $q = q_0$ est connecté à un groupement série L, C_2. Le condensateur de capacité C_2 est initialement déchargé. Pour simplifier, on prendra $C_1 = C_2 = C$.



1. Etablir l'expression de $i(t)$. On posera $\omega_0 = \sqrt{\frac{2}{LC}}$. Tracer $i(t)$.
2. Effectuer un bilan des puissances reçues par la bobine et par l'ensemble des deux condensateurs. En déduire une équation de conservation de l'énergie totale stoquée dans le circuit.
3. Chacun des dipôles fonctionne-t-il en générateur ou en récepteur ?

EX 3 – Régime libre d'un circuit bouchon

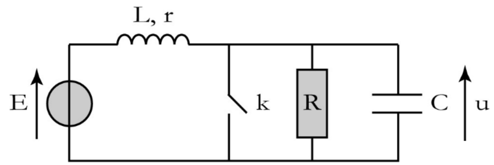
On considère le montage "bouchon" ci-contre, avec $R = 10\mathrm{k}\Omega$, $L = 100\mathrm{mH}$, et $C = 0,1\mu\mathrm{F}$.
On prendra pour conditions initiales : la charge du condensateur $q(t = 0) = q_0$ et l'intensité dans la bobine $i(t = 0) = 0$.



1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$ et la mettre sous forme canonique.
2. a) Le régime libre du circuit est-il apériodique, critique ou pseudo-périodique ?
   b) Déterminer l'expression complète de $u(t)$.
3. Calculer l'écart relatif de la pseudo-période T à la période propre T_0 , c'est-à-dire la quantité $\frac{\Delta T}{T_0} = \frac{T-T_0}{T_0}$. Commenter.
4. Tracer l'allure de $u(t)$ en indiquant notamment la tangente à l'origine et la pseudo-période.

EX 4 – Surtension

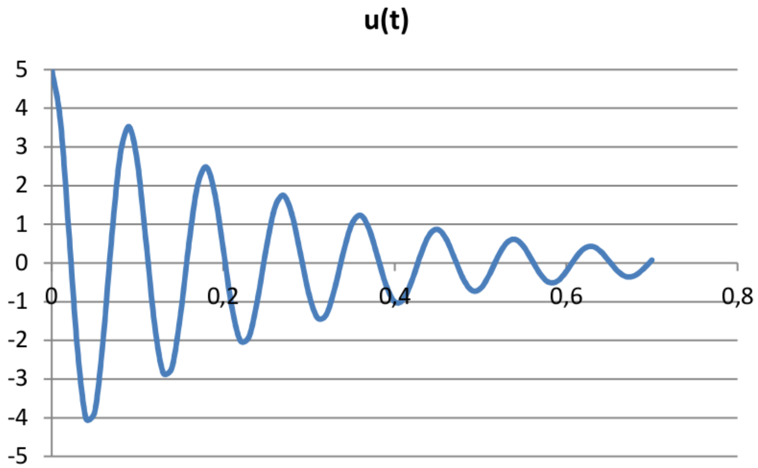
On considère le circuit ci-dessous. La bobine possède une inductance L et une résistance interne r. L'interrupteur étant fermé depuis très longtemps, on l'ouvre à l'instant $t = 0$.



1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur.
2. a) Déterminer $u(t = 0^+)$ et montrer que $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t = 0^+) = \frac{E}{rC}$.
   b) à l'aide d'un schéma équivalent, établir la tension u_∞ aux bornes du condensateur une fois le régime permanent pour $t > 0$ atteint.
3. a) Tracer l'allure des différentes formes possibles de $u(t)$.
   b) Afin de ne pas endommager le condensateur lors de l'ouverture de l'interrupteur, on souhaite que la tension $u(t)$ à ses bornes dépasse peu u_∞. Quel régime faut-il alors absolument éviter ? Quelle relation entre r, L, C et R doit alors être vérifiée ?
   c) Si l'on souhaite de plus que le régime permanent soit atteint le plus rapidement possible, quelle relation entre r, L, C et R doit être vérifiée ? Préciser alors l'expression de $u(t)$.

EX 5 – Exploitation d'un graphe expérimental

On observe ci-dessous la réponse d'un circuit série RLC en régime libre, au niveau de la tension aux bornes du condensateur $u(t)$. Proposer un montage permettant d'observer cette évolution.



Exploiter le graphe fourni pour en déduire l'inductance L de la bobine et la résistance totale R du circuit, sachant que la capacité du condensateur vaut $C = 1,0\,\mu$F.
L'axe des temps est gradué en millisecondes.

EX 6 – Pendule oscillant dans du miel

Un fil inextensible de longueur $\ell = 0.50$ m, de masse négligeable, est accroché au plafond. À son autre extrémité est suspendu un mobile ponctuel de masse $m = 100$ g. Le pendule ainsi constitué oscille dans du miel, fluide qui exerce sur le mobile une force de frottement fluide linéaire en vitesse et de coeffient $\lambda = 1$ kg.s^{-1}. On lâche le pendule sans vitesse initiale avec un angle d'inclinaison par rapport à la verticale $\theta_0 = 0.2$ rad.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ d'inclinaison du fil par rapport à la verticale en faisant l'hypothèse des petits angles.
2. Indiquer quel type de mouvement effectue le pendule. Calculer le facteur de qualité Q. Donner la forme de $\theta(\mathrm{t})$ et déterminer les constantes d'intégration. Préciser la valeur finale atteinte par θ.
3. Tracer l'allure du portrait de phase.