Mouvements dans les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$

EX 1 – Filtrage électromagnétique de vitesses

Une particule de charge q se trouve initialement à l'origine d'un repère O_{xyz}. La particule arrive entre les plaques d'un condensateur avec une vitesse d'injection $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_x$, perpendiculaire au champ $\overrightarrow{E} = E\vec{u}_y$.

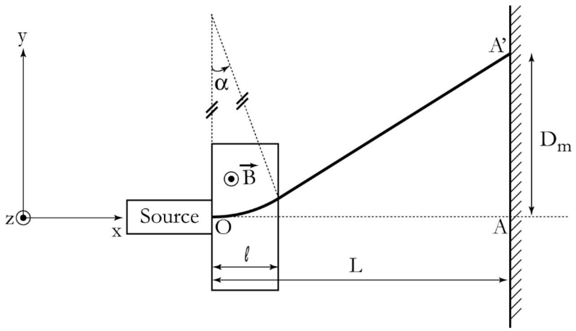
1. Déterminez les caractéristiques du champ magnétique $\overrightarrow{B}$ uniforme, orthogonal à $\vec{v}_0$, qu'on doit superposer au champ électrique $\overrightarrow{E}$ pour que la particule ne soit pas déviée et conserve un mouvement rectiligne uniforme.

2. Expliquez comment ce dispositif peut servir de filtre de vitesse.

EX 2 – Mesure de $\frac{e}{m}$ par déviation magnétique

La méthode suivante permis à J.-J. Thomson de calculer, dès 1897, le rapport des constantes $\frac{e}{m}$ fondamentales pour l'électron. R.-A. Millikan détermina plus tard la charge élémentaire e, la mesure de la masse de l'électron en découlait.

On considère un pinceau d'électrons homocinétiques, de vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_x$, pénétrant dans une région de longueur ℓ où règne un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ fixe, de direction O_z. On observe la position du spot créé sur un écran situé à la distance L du point O ($L \gg \ell$). On note A la position du spot sur l'écran en l'absence de champ.



1. Lorsqu'un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ est appliqué dans la région $0 \leq x \leq \ell$, le faisceau est recueilli en un point A' sur l'écran.

a) Déterminer la nature du mouvement, et ses caractéristiques. On considérera que l'angle α balayé par l'électron, dans la zone $0 \leq x \leq L$, est faible ($\alpha \ll 1$).

b) Déterminer la déviation magnétique $D_m = AA'$ en fonction des données du problème.

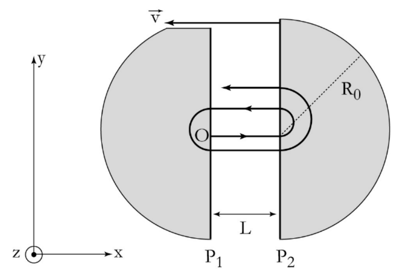
2. **a)** A.N. : on mesure $D_m = 14,05\,\text{cm}$ pour les caractéristiques suivantes du dispositif : $\ell = 1,00\,\text{cm}$, $L = 50,0\,\text{cm}$, $B = 8,0\,10^{-4}\,\text{T}$ et $v_0 = 5,00\,10^{6}\,\text{m.s}^{-1}$.

(la valeur de v_0 peut par exemple être déterminée en appliquant un champ électrique $\overrightarrow{E}$ selon O_y d'intensité réglable connue, et en réglant E de façon à ce que les particules soient non déviées (cf. exercice 1).

En déduire la valeur du rapport e/m.

EX 3 – Accélérateur de particules : le cyclotron

Un cyclotron est constitué de deux enceintes demi-cylindriques («dees»), de rayon $R_0 = 1,0\,m$, placées horizontalement dans un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ uniforme et perpendiculaire au plan de la figure (selon l'axe z). Des protons sont émis au point O, milieu d'un "dee". Entre les plaques P_1 et P_2, espacées d'une distance $L \ll R_0$, les protons sont soumis à une tension alternative d'une centaine de volts qui permet de les accélérer à chaque passage.



1. Préciser le sens du champ magnétique pour que les protons décrivent la trajectoire représentée sur la figure ci-dessus.

2. Rappeler les caractéristiques du mouvement des protons dans les "dees" (champ magnétique uniforme, orthogonal à la vitesse initiale). Justifier alors que le champ électrostatique doit être alternatif et déterminer sa fréquence en fonction de B, e et m (on négligera pour cela le temps de parcours des protons entre les deux plaques par rapport au temps passé dans les "dees").

3. À la sortie du cyclotron, les protons possèdent une énergie cinétique $E_c = 10\,\text{MeV}$. On prendra la masse des protons de l'ordre de 2000 fois celle des électrons ($m_{e-} \approx 9,1\,10^{-31}\,\text{kg}$).

a) Calculer la vitesse v_s des protons à la sortie du cyclotron. Commenter.

b) En déduire la valeur du champ magnétique B appliqué dans le cyclotron.

c) Calculer la fréquence de la tension alternative à appliquer au cyclotron. Commenter.

4. Estimer la différence de potentiel à appliquer pour atteindre une telle vitesse en sortie de l'accélérateur si l'accélérateur utilisé avait été linéaire (n'utilisant que le champ électrostatique et pas le champ magnétique). Conclure sur l'intérêt du cyclotron.

EX 4 – Particule freinée dans un champ magnétique

Une particule chargée, de charge q et de masse m, se déplace dans une région où un frottement fluide $\vec{F} = -\lambda\,\vec{v}$ s'exerce en permanence sur la particule. Elle est également soumise à un champ magnétique $\vec{B} = -B_0\,\vec{u}_z$. On néglige le poids de la particule, dont la vitesse initiale est $\vec{v}_0 = v_0\,\vec{u}_x$.

1. Montrer que le mouvement est plan.

2. Dans le plan du mouvement, on écrit $\vec{v} = v(t)\,\vec{u}(t)$, où le vecteur $\vec{u}(t)$ est unitaire. On notera $\theta(t)$ l'angle formé par $\vec{u}_x$ et $\vec{u}(t)$. On note aussi $\vec{u}'$ le vecteur unitaire du plan du mouvement, directement perpendiculaire à $\vec{u}(t)$. Ecrire l'équation du mouvement, en projection sur la base $(\vec{u}, \vec{u}'$.

3. Déterminer $\vec{u}(t)$, $\theta(t)$ et $v(t)$.

4. En déduire les lois horaires du mouvement, en coordonnées cartésiennes. Tracer l'allure de la courbe. Quel est le mouvement si $\lambda = 0$?

EX 5 – Piégeage des électrons dans le champ magnétique terrestre

Le champ magnétique terrestre est assimilé à celui créé par un dipôle magnétique de moment $\overrightarrow{\mathcal{M}} = \mathcal{M}\,\vec{u_z}$. On rappelle son expression expression en coordonnées et dans la base sphériques :

$$\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi r^3}\left(2\cos\theta\vec{u}_r + \sin\theta\vec{u}_\theta\right)$$

On s'intéresse au mouvement de particules chargées dans ce champ ; on considérera des électrons.

1. Rappeler l'orientation de $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ par rapport à la Terre.

2. **a)** Montrer que l'accélération azimuthale peut s'exprimer : $a_\varphi = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\sin^2\theta\dot{\varphi})$

b) En déduire l'intégrale première du mouvement suivante :

$$\dot{\varphi}r^2\sin^2\theta - C\,\frac{\sin^2\theta}{r} = K$$

où K et C sont des constantes. Déterminer C.

3. Etablir une seconde intégrale première du mouvement.

4. Montrer que le mouvement de l'électron peut être assimilé à un mouvement dans un plan $\varphi =$constante, soumis à une énergie potentielle effective $U_{\text{eff}}(r, \theta)$ que l'on déterminera.

5. Montrer que les électrons peuvent rester piégés entre des lignes de champ magnétique.

6. Etablir la condition de piégeage en fonction de la position initiale (r_0, θ_0), de la vitesse angulaire azimuthale $\dot{\varphi}$, et de la vitesse initiale v_0 (norme de $\vec{v}$) de l'électron.