Systèmes de points
Solide en rotation autour d'un axe fixe

EX 1 – Promenade en bateau

Deux personnes de 70 kg sont dans un bateau de 120 kg. Ils descendent une rivière avec une vitesse rectiligne de 2 $m.s^{-1}$ par rapport aux rives.

1. L'une des personnes plonge dans la rivière avec une vitesse de 3 $m.s^{-1}$ par rapport au rivage dans le sens opposé à celui du bateau. Quelle est la vitesse du bateau juste après la chute ?
2. Même question pour un plongeon perpendiculaire au mouvement du bateau.

EX 2 – Réaction du stator sur un rotor déséquilibré

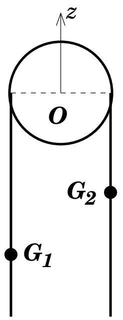
Un rotor est constitué d'un disque de rayon R de masse m et de centre O, solidaire d'un arbre de masse négligeable, en liaison pivot autour de l'axe O_z. Le disque n'est pas homogène, de telle sorte que son centyre d'inertie I est excentré, à une distance $OI = a$ de l'axe. La liaison pivot est supposée parfaite. On note J_z le moment d'inertie du disque par rapport à l'axe.

1. Comment évolue la vitesse angulaire du disque ω, de valeur initiale ω_0 ?
2. Calculer la réaction $\overrightarrow{R}$ du stator sur le rotor. Conclure.

EX 3 – Course entre deux singes le long d'une corde *

Deux singes de même masse m, assimilés à leur centre d'inertie G_1 et G_2, sont agrippés chacun à l'un des deux pendants d'une corde, de masse négligeable, coulissant sans frottement sur une poutre. L'ensemble est initialement au repos, le singe 2 se trouvant plus haut que le singe 1. Ce dernier se met alors à monter le long de la corde, alors que le singe 2 reste immobile par rapport à elle.

1. Montrer que les deux singes gardent la même accélération par rapport au sol. Le singe 1 peut-il atteindre le sommet le premier ?
2. Montrer que le système {singes, cordes} acquiert une quantité de mouvement dirigée vers le haut. Expliquer ce sens de variation de la quantité de mouvement, alors que les forces extérieures que sont le poids des corps sont dirigées vers le bas.
3. Appliquer au système le théorème du moment cinétique en O, centre de la tige. Retrouver les résultats du 1.
4. Comment expliquer que le système acquiert de l'énergie cinétique alors que le travail des poids est résistant ?



EX 4 – Masses et poulie *

On considère une poulie en forme de disque de rayon R fixée à un axe fixe dans le référentiel d'étude, considéré galiléen. La liaison pivot est considérée parfaite. Le câble posé sur la rainure de la poulie est inextensible, sans masse, et ne glisse pas lorsqu'elle tourne. Il relie deux masses m_1 et m_2 considérées ponctuelles en M_1 et M_2. L'ensemble est soumis au champ de pesanteur $\vec{g} = -g\,\vec{u}_z$.

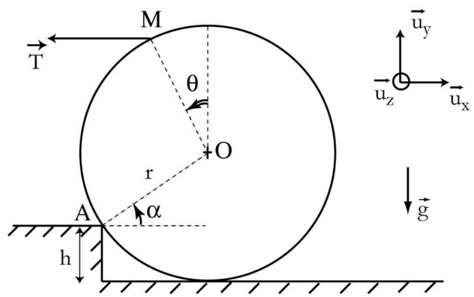
1. **a)** Dans l'hypothèse d'une poulie sans masse, démontrer que la tension du fil appliquée à M_1 est égale en norme à celle appliquée à M_2, même si les masses ne sont pas à la verticale de la poulie.
   b) Etablir l'équation du mouvement de chaque masse dans le cas du mouvement 1D vertical.
   c) Calculer le temps de chute de la masse la plus lourde sachant qu'elle se situe à la verticale de la poulie à l'instant initial, sans vitesse et à une hauteur h du sol.
2. On ne néglige plus la masse M de la poulie, dont le moment d'inertie par rapport à son axe de rotation vaut $J = \frac{1}{2}MR^2$.
   a) Etablir de nouveau l'équation du mouvement de chaque masse par une approche dynamique.
   b) Retrouver ces équations par une approche énergétique. Justifier.
   c) Comment est modifié le temps de chute calculé ci-dessus ?
3. On modifie le dispositif de la façon suivante. On remplace la masse m_2 par un ressort de raideur k, dont l'autre extrémité est accrochée au sol à la verticale de la poulie. On s'intéresse alors au mouvement de la masse m_1 restante. Etablir l'expression de la période des oscillations de la masse.

EX 5 – Limite de décollement : montée d'une marche *

On considère une roue de masse m, de rayon r et de centre O, appuyée en un point A contre une marche de hauteur $h < r$. On note α l'angle $(\vec{u}_x, \overrightarrow{AO})$.

La roue est immobile. On attache un cordon en un point M du bord de la roue, définissant un angle $\theta = (\vec{u}_y, \overrightarrow{OM})$. On exerce une tension $\overrightarrow{T}$ sur le cordon selon $-\vec{u}_x$.

On cherche à déterminer la tension minimale $T_{min}(\theta)$ qu'il faut exercer sur la corde pour que la roue commence à se soulever du sol, en fonction de la position du point d'attache du cordon.



1. Déterminer les forces s'exerçant sur la roue à l'équilibre.

2. Appliquer le th. du moment cinétique en un point judicieusement choisi.

3. En déduire $T_{\min}$ en fonction de h, m, g, r et θ.

4. Discuter les cas limites $h = 0$ et $h = r(1 + \cos\theta)$.

5. Quelle position d'attache du cordon sur la roue permet à la personne tirant sur le cordon de fournir le moins d'effort possible ? Interpréter.

EX 6 – Choc mou ou choc élastique *

Deux masses m_1 et m_2 sont mobiles sur un axe Ox sans frottement (chariots à roulette, mobiles sur banc à coussin d'air...), en mouvement l'une vers l'autre avec les vitesses respectives $\vec{v}_1 = v_1\,\vec{u}_x$ et $\vec{v}_2 = v_2\,\vec{u}_x$.

1. On suppose qu'elles subissent un *choc mou*, c'est-à-dire tel qu'elles restent ensuite solidaires l'une de l'autre.

a) Quelle sera alors leur vitesse commune $\vec{v}'$ après le choc ?

b) Montrer que lors du choc, le travail des forces intérieures vaut

$$W_{\text{int}} = -\frac{1}{2}\,\mu\,(v_2 - v_1)^2 \quad \text{avec} \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Interpréter ce résultat.

2. On suppose désormais que le choc est élastique, c'est-à-dire que l'énergie cinétique totale se conserve.

a) Etablir les deux équations vérifiées par les valeurs algébriques des vitesses v_1 et v_2 avant le choc et v_1' et v_2' après le choc.

b) En déduire v_1' et v_2' en fonction de v_1, v_2, m_1 et m_2.

c) On suppose que $v_2 = 0$. Interpréter le cas $m_2 \gg m_1$. A quelle condition est-il possible d'échanger lors du choc les vitesses des deux masses ("faire un carreau" à la pétanque...) ?

EX 7 – Pendules couplés **

Deux pendules pesants de moments d'inertie J_1 et J_2 par rapport à leur axe sont couplés par un fil exerçant un couple de torsion $-\alpha\theta$ pour un angle de torsion θ. Les centres d'inertie de chaque pendule sont chacun à une distance a de l'axe. Etablir les équations différentielles vérifiées par les angles θ_1 et θ_2 que fait chaque pendule par rapport à sa position d'équilibre. En déduire l'expression des pulsations propres possibles des petites oscillations (pulsations des modes harmoniques, dits *modes propres*), dans le cas $J_1 = J_2$. Décrire ces modes propres.

EX 8 – Problème à deux corps **

On considère un système de deux corps à symétrie sphérique assimilables à des points matériels $M_1(m_1)$ et $M_2(m_2)$ en interaction mutuelle. Le système est étudié dans un référentiel supposé galiléen, où il est considéré isolé ou pseudo-isolé vis-à-vis du reste de l'univers.

1. Que peut-on dire de la vitesse du barycentre G des deux masses ? Que peut-on en déduire du référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*$?

2. On s'intéresse au mouvement relatif de M_2 par rapport à M_1 dans $\mathcal{R}^*$. En appliquant le PFD à M_1 et à M_2, montrer que le mouvement relatif peut se voir comme le mouvement dans $\mathcal{R}^*$ d'une particule M de masse $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ soumise à la force $\overrightarrow{F}_{1\to 2}$ de M_1 sur M_2. On appelle *particule réduite* cette particule, et *masse réduite* sa masse.

3. On se place maintenant dans le cas où l'interaction entre M_1 et M_2 est de nature gravitationnelle.

a) Quelle est alors la nature de la trajectoire de la particule réduite M dans $\mathcal{R}^*$? En déduire la nature de la trajectoire de M_1 et de M_2 dans $\mathcal{R}^*$? Quelle relation y a-t-il entre ces trois trajectoires ?

b) Dans le cas des états liés, comment est modifiée la 3ème loi de Kepler ?

4. Application au cas d'une étoile double.
On considère deux étoiles $M_1(m_1)$ et $M_2(m_2)$ formant dans l'espace une *étoile double*[1] que l'on pourra considérer comme isolée.
On suppose que ces deux étoiles décrivent des orbites circulaires autour du centre d'inertie de l'ensemble. On observe que les rayons des orbites sont dans le rapport $x = 2$, que la distance entre les deux étoiles est $L = 3 \times 10^{12}$ m et que la période de révolution de ce système est $T = 50$ années. En déduire la masse de chaque étoile.
Données : $\mathcal{G} = 7 \times 10^{-11}\,\text{kg}^{-1}\text{m}^2\text{s}^{-2}$.

5. Application au système Terre-Lune.
On suppose aussi que les trajectoires sont circulaires. Exprimer l'énergie totale du système Terre-Lune dans $\mathcal{R}^*$ en fonction des masses M_T et M_L des deux astres, de leur distance d, et de leurs rayons respectifs R_T et R_L. Faire l'application numérique.
Données : $M_T = 6\times 10^{24}$ kg, $M_L = 7\times 10^{22}$ kg, $D = 2\times 10^{11}$ m, $d = 4\times 10^{8}$ m, $\mathcal{G} = 7 \times 10^{-11}\,\text{kg}^{-1}\,\text{m}^3\,\text{s}^{-2}$, $R_T = 6,4 \times 10^3$ km et $R_L = 1,7 \times 10^3$ km.
Moment d'inertie d'une boule homogène de rayon R et de masse M : $J = \frac{2}{5} M R^2$.

1. Deux étoiles tournant l'une autour de l'autre sous l'effet de l'attraction gravitationnelle.