Forces centrales newtoniennes

EX 1 – Comète de Halley

La période de la comète de Halley[1] est T = 76,0 années. La distance du périhélie de sa trajectoire au Soleil est $r_p = 0,59$ UA. UA désigne l'*unité astronomique*, égale au demi-grand axe de l'orbite terrestre.

1. Calculer, le demi-grand axe (en UA) et l'excentricité de l'orbite de la comète.
2. Calculer les vitesses maximale et minimale de la comète, en UA.an^{-1}. Pour information, convertir en km.s^{-1} sachant que 1 UA $\approx 1,5\,10^8$ km.

EX 2 – Orbite de transfert d'un satellite

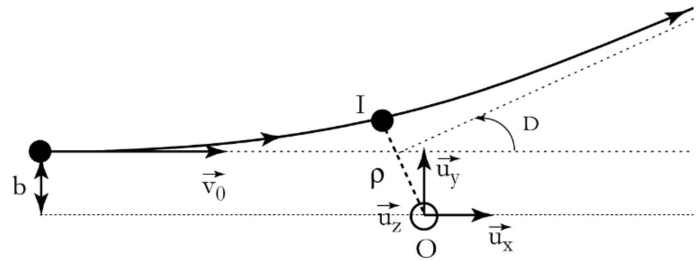
Un atellite de la Terre est sur une orbite de rayon r_0. En un point A on lui communique subitement une vitesse $\vec{v}_A$ perpendiculaire au rayon vecteur $\vec{r}_0$ pour le faire passer sur une nouvelle trajectoire, dite *orbite de transfert*. On note M_T la masse de la Terre, et $\mathcal{G}$ la constante de gravitation universelle.

1. Exprimer la vitesse v_c sur l'orbite circulaire en fonction des données.
2. a) Que peut-on dire du point A pour l'orbite de transfert ? En déduire les relations possibles entre le paramètre p, l'excentricité e et le rayon r_0 pour l'orbite de transfert.
   b) Exprimer son excentricité en fonction de v_A et v_c (normes).
   c) En déduire le type de trajectoire[2] dans les cas (i) $v_A = v_c$, (ii) $v_A = v_c/3$ et (iii) $v_A = 3v_c$. Calculer le demi grand-axe dans le cas elliptique.
3. Retrouver ces résultats en raisonnant sur l'énergie.

1. *L'astronome anglais Edmond Halley (1656-1742) fut le premier à découvrir que les comètes sont des objets orbitaux. En 1682, il observa une comète et remarqua que sa trajectoire coïncidait avec celles de comètes observées en 1531 et 1607. Il pensa donc qu'il s'agissait du même astre et prédit qu'elle reviendrait en 1758. Halley ne vécut pas assez longtemps pour être le témoin de l'événement, mais la comète fut au rendez-vous. Venue nous rendre visite en 1986, la comète de Halley est maintenant attendue...en 2061.*
2. En toute rigueur on devrait parler d'«orbite de transfert» uniquement dans le cas des états liés, ce qui n'interdit pas a priori d'exploiter des états libres/de diffusion pour le transfert... ?

EX 3 – Distance minimale d'approche : Diffusion de rutherford[3]

L'expérience de Rutherford[4] consiste à observer la déviation de faisceaux de particules α, (noyaux d'Hélium, He^{2+}, constitués de 2 neutrons et de 2 protons) à travers une mince feuille d'or.
Considérons un noyau d'Hélium, de masse m_1 et de charge $q_1 = 2e$. Il subit la force de répulsion électrostatique d'un noyau d'or, quasiment immobile et centré au point O, de masse $m_2 > m_1$ et de charge $q_2 = Ze$ (avec Z = 79, numéro atomique de l'or).
La distance entre le support de la vitesse des particules α très loin du point O, $\overrightarrow{v_0} = v_0\,\overrightarrow{u_x}$, et la droite passant par O parallèle à $\overrightarrow{v_0}$ est appelée *paramètre d'impact* et notée b.



1. Exprimer la force d'interaction électrostatique exercée par le noyau d'or sur la particule α. L'interaction est-elle attractive ou répulsive ? Rappeler alors la nature de sa trajectoire.
2. Montrer la conservation du moment cinétique par rapport au point O. En déduire la loi des aires et calculer la constante des aires en fonction de b et v_0.
3. En utilisant la conservation de l'énergie mécanique E_m, exprimer le rayon minimal de la trajectoire, $\rho = OI$, pour un paramètre d'impact b donné, en fonction des données du problème.
4. Calculer la déviation D de la trajectoire.
5. On considère que le noyau d'or est bombardé par un faisceau de particules α de paramètres d'impact variables. Exprimer la distance minimale d'approche $d = \min(\rho)$, en fonction de E_m et des constantes du problème. Commenter[5].

3. En prolongement de l'approche documentaire sur la diffusion de Rutherford.
4. *Il s'agit d'une expérience historique, réalisée en 1911. Au début du XX*^{e} *siècle, la représentation de l'atome adoptée était celle de J.J Thomson, considérant l'atome comme une boule d'électricité positive uniformément répartie, dans laquelle évoluaient des électrons, chargés négativement. Rutherford réfuta grâce aux résultats expérimentaux de cette expérience.*
5. *Dans son article originel, Rutherford indique que pour une particule α d'énergie 9 MeV*

EX 4 – Chute de la Terre sur le Soleil

La Terre décrit une trajectoire circulaire de rayon D et de période T autour du Soleil, de rayon R_s. Supposons qu'elle soit brutalement immobilisée, elle tomberait alors sur le Soleil au bout d'un temps T_{ch}.

1. En utilisant la conservation de l'énergie, exprimer T_{ch} par une intégrale sur la distance r qui les sépare à l'instant t. Calculer cette intégrale en posant le changement de variable $r/D = \cos^2\varphi$.

2. En assimilant la trajectoire rectiligne à une ellipse de demi petit-axe nul, et en négligeant la dimension propre des 2 astres par rapport à D, exprimer T_{ch} en fonction de T. Le résultat est-il cohérent avec la question précédente ?

3. La correction apportée par le calcul de la question **1.** est-elle importante ? Pour quelle raison physique ?

Données : rayon du Soleil $R_\odot = 6,96\times10^8$ m $\approx 0,0047$ u.a. ; $D = 1,50\times10^{11}$ m $=$ 1 u.a.

EX 5 – Force centrale en $1/\mathrm{r}^3$

Une particule M de masse m est soumise de la part d'un centre O à une force $\overrightarrow{F} = -\frac{k}{r^3}\overrightarrow{u_r}$, k étant une constante, $r = OM$ et $\overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{OM}/OM$ le vecteur unitaire de la base sphériques [6].

1. Montrer que le mouvement est plan et que $C = r^2\dot{\theta}$ est une constante du mouvement.

2. **a)** Exprimer l'énergie potentielle E_p associée à $\overrightarrow{F}$, en prenant E_p nulle à l'infini.

b) Montrer que M peut être vu comme un système à un degré de liberté r soumis à une force dérivant de l'énergie potentielle effective $E_{p_{\text{eff}}}(r) = -\frac{k'}{r^2}$. Exprimer k'.

c) Etudier qualitativement le type de mouvements possibles suivant le signe de k' et celui de la vitesse radiale initiale notée $\dot{r}(0) = \dot{r}_0$.

3. **a)** A l'aide du changement de variable de Binet, retrouver les trajectoires possibles en coordonnées polaires $r(\theta)$ en supposant connue la constante des aires C. On étudiera successivement les cas $k' = 0$, $k' < 0$ (cas "faiblement attractif" si $k > 0$) et $k' > 0$ (cas "fortement attractif").

($v_0 \sim 2.10^7$ m.s^{-1}), la distance minimale d'approche est alors d'environ $2,4.10^{-14}$ m, bien inférieure aux dimensions caractéristiques d'un atome (10^{-10} m). Il en conclu alors l'existence du noyau atomique, charge centrale positive responsable de la répulsion observée.

6. Ce type de force apparaît par exemple à cause de la non-sphéricité des astres. Elle a un effet perturbateur sur le mouvement des satellites.

b) Dans chacun des cas ci-dessus, considérer en particulier le cas où $\dot{r}_0 = 0$. Dans ces conditions en déduire la loi horaire $\theta(t)$, et représenter la trajectoire.
Y a-t-il un cas où M rejoint le centre de force ? Si oui quel temps met-il pour le faire ?

EX 6 – Modèle de Bohr de l'atome hydrogénoïde

On considère un atome d'hydrogène, ou un ion formé d'un atome de numéro atomique Z ayant perdu tout ses électrons sauf un [7]. On étudie les trajectoires possibles de l'électron, de masse m_e, soumis à l'attraction du noyau sous la forme d'une force $\overrightarrow{F} = -\frac{K}{r^2}\overrightarrow{u_r}$.

1. Exprimer K. Établir les deux intégrales premières du mouvement. En déduire que le problème se ramène à l'étude d'un système conservatif à un degré de liberté r soumis à une énergie potentielle effective $E_{p,\text{eff}}(r)$ qu'on exprimera en fonction de la constante des aires C.

2. Dans la suite on s'intéresse uniquement aux états d'énergie minimale de l'électron. Montrer qu'alors sa trajectoire est circulaire.

On admet que le principe de De Broglie selon lequel à toute particule peut être associée une longueur d'onde reliée à la quantité de mouvement p par la constante de Planck selon $\lambda = \frac{h}{p}$. Bohr en déduit que si l'électron occupe une orbite circulaire de rayon r, alors sa longueur d'onde doit vérifier la condition de quantification suivante [8] : $n\lambda = 2\pi r$.

3. En déduire que le moment cinétique est quantifié et vérifie : $\sigma = n\hbar$ avec $\hbar = \frac{h}{2\pi}$.

4. En déduire que le rayon de l'orbite est lui-même quantifié par la relation $r_n = r_1\frac{n^2}{Z}$. où r_1 est le rayon de Borh de l'atome d'hydrogène dont on donnera l'expression et la

5. En déduire que les niveaux d'énergie de l'électron sont quantifiés selon la loi : $E_n = -R_y\frac{Z^2}{n^2}$, où R_y est la constante de Rydberg, que l'on exprimera et dont on donnera la valeur en eV.

7. atome « hydrogénoïde ».
8. Condition d'interférence constructive de l'électron sur lui-même après un tour, assimilable à une condition de quantification de mode propre.