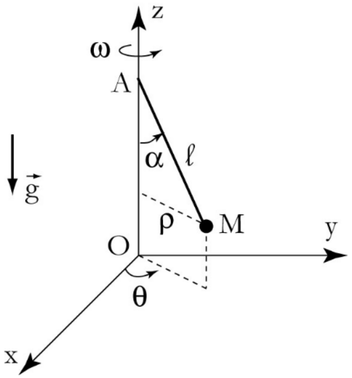
# Moment cinétique d'un point matériel

## EX 1 – Pendule en rotation 3D

Un point matériel $M$ de masse $m$ est lié par un fil inextensible de longueur à un point fixe A. La masse tourne autour de l'axe $A_z$ à vitesse angulaire constante $\omega$. On appelle $\alpha$ l'angle $(\widehat{-\vec{u}_z, \overrightarrow{AM}})$. La position du point $M$ est repérée grâce à la distance $\rho$ entre $M$ et l'axe $A_z$ . Les frottements sont négligés.



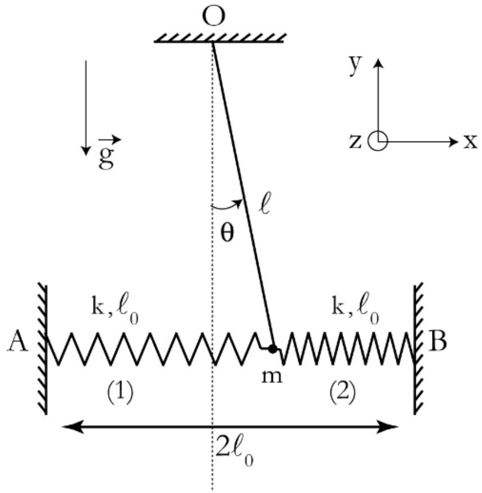

1. Donner le lien entre $\ell$, $\alpha$ et $\rho$.
2. a) Déterminer l'expression du moment cinétique du point $M$ par rapport à l'axe $O_z$.
   b) Montrer que ce moment cinétique par rapport à $O_z$ est constant.
   c) En déduire que le mouvement s'effectue à une distance constante de l'axe $O_z$.
3. Déterminer la tension $T$ du fil en fonction de $m$, et $\omega$.
4. En déduire l'angle $\alpha$ avec lequel le pendule tourne, en fonction de $g$, et $\omega$.
5. Ce mouvement est-il possible pour toutes les valeurs de $\omega$ ? Préciser.
6. En déduire l'expression du rayon $\rho$ avec lequel se fait le mouvement.

A.N. : Calculer $\rho$. On donne pour cela $\ell = 30$ cm, $\omega = 1$ tour/s et $g = 9.81$ m.s$^{-2}$.

## EX 2 – Pendule relié à des ressorts

Un pendule simple est constitué d'une tige rigide de masse négligeable et de longueur $\ell$. Il est accroché en un point $O$, fixe dans le référentiel terrestre. À son autre extrémité, on fixe un point matériel $M$ de masse $m$. $M$ est également attaché à deux ressorts (1) et (2) identiques, de constante de raideur $k$ et de longueur à vide $\ell_0$, fixés en deux points $A$ et $B$ distants de $2\ell_0$.

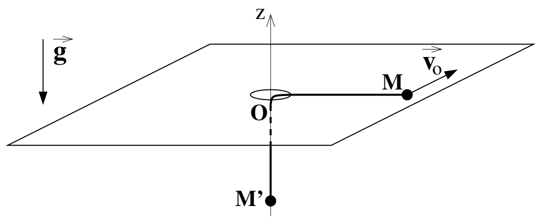
On déplace légèrement $M$ par rapport à la verticale puis on le laisse évoluer librement. Il oscille alors en décrivant un petit arc de cercle de centre $O$, dans un plan vertical, et on repère sa position par l'angle $\theta$ avec la verticale. Cet angle restant toujours faible, on pourra considérer que les ressorts restent horizontaux.




1. Déterminer l'expression du moment cinétique de $M$ par rapport à $O$.
2. Calculer les moments des forces s'exerçant sur $M$, par rapport au point $O$.
3. Par application du théorème du moment cinétique, déterminer l'équation différentielle vérifiée par $\theta$ et en déduire la pulsation des petites oscillations.

## EX 3 – Deux points en mouvement reliés par un fil

Un fil inextensible, de masse négligeable et de longueur $\ell_0$ relie le point matériel $M$ de masse $m$ à un point $M'$ de masse $m'$ en passant par un trou disposé au centre $O$ d'un plan horizontal $(Oxy)$. On néglige tout frottement de $M$ ou du fil sur la table. La vitesse initiale $\vec{v}_0$ de $M$ est horizontale et orthoradiale, de norme $v_0$. La distance initiale au trou vaut $OM = r_0$. On note $g$ l'accélération de la pesanteur.




1. Relier la côte $z$ de $M'$ à la distance $r = OM$.
2. Montrer que le mouvement de $M$ vérifie la loi des aires. Donner la valeur de la constante des aires $C$.
3. Exprimer la norme $T$ de la tension du fil en fonction de $\ddot{r}$ et des constantes nécessaires.
4. En appliquant le théorème de l'énergie mécanique pour le point $M$, établir une expression de $\dot{r}^2$ en fonction de $r$, et des constantes nécessaires.

**5.** Montrer que le mouvement est compris entre deux cercles de centre $O$, dont on déterminera les rayons $r_1$ et $r_2$. A quelle condition la position initiale est-elle le point de la trajectoire le plus éloigné de O ?

**6.** A quelle condition le mouvement est-il circulaire ? Montrer qu'il est alors nécessairement uniforme.

## EX 4 – Mouvement d'un bille dans un cône

On considère un matériel $M$ glissant sans frottements à l'intérieur d'un cône dont la génératrice fait un angle $\alpha$ avec l'axe $Oz$ vertical dirigé vers le haut, $O$ étant le sommet du cône. On suppose le champ de pesanteur uniforme $\vec{g} = -g\vec{u}_z$. On se place en coordonnées cylindriques d'axe $Oz$ et de centre $O$. On travaille dans le référentiel terrestre qu'on supposera galiléen. On adopte les coordonnées cylindriques.

**1.** Déterminer la relation entre les coordonnées $r$ et $z$. En déduire l'expression de la vitesse $\vec{v}$ et de l'accélération $\vec{a}$ en fonction de $r$ et $\dot{\theta}$.

**2.** Montrer que la composante verticale $\sigma_z$ du moment cinétique en $O$ est conservée au cours du mouvement. S'agit-il d'un mouvement à force centrale ?

**3.** En appliquant le théorème de l'énergie mécanique, montrer que le problème peut se ramener à l'étude d'un système à un degré de liberté évoluant dans un champ de force conservatif d'énergie potentielle effective $E_{p\,\text{eff}}(r)$. Donner l'expression de $E_{p\,\text{eff}}(r)$.

**4.** On s'intéresse uniquement aux trajectoires dont la vitesse initiale est orthoradiale : $\vec{v}_0 = v_0\,\vec{u}_\theta$ en $r(0) = r_0$.

- **a)** Exprimer la composante selon $z$ du moment cinétique, $\sigma_z$, en fonction de ces conditions initiales.
- **b)** A quelle condition sur $v_0$ la bille atteint-elle le fond du cône ? Quelle est alors la nature de la trajectoire ?
- **c)** Déterminer $v_0$ pour que la trajectoire soit un cercle de rayon $r_0$ et d'altitude constante.
- **d)** Montrer graphiquement que dans le cas général et si $\sigma_z \neq 0$ le mouvement est dans un état lié dont les rayons extrêmes sont $r_{\text{min}}$ et $r_{\text{max}}$ qu'on repérera graphiquement.

**5.** Comment les frottements, négligés jusqu'ici, vont-ils influencer ce mouvement ?