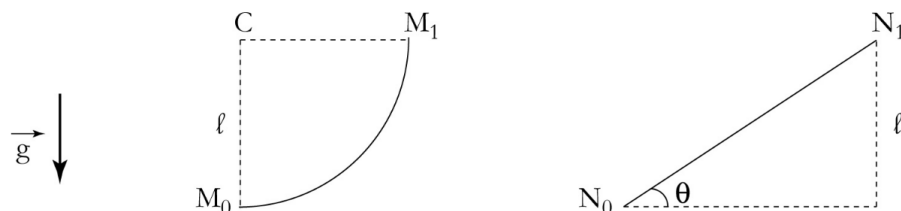


Approche énergétique

EX 1 – Travaux de forces

- Une bille de masse m est susceptible de glisser sans frottements soit :
- à l'intérieur d'un quart de jante circulaire de centre C et de rayon ℓ ;
 - sur un plan incliné d'un angle θ par rapport à l'horizontale.



1. Dans chaque situation, déterminer les travaux des différentes forces qui s'exercent sur la bille sur les trajets de M_0 à M_1 ou de N_0 à N_1 .
2. En déduire la vitesse minimale v_0 qu'il faut communiquer à la bille en M_0 (respectivement N_0) pour qu'elle atteigne le point M_1 (respectivement N_1). Comparer les différents résultats.
3. On ajoute une force de frottement solide \vec{T} vérifiant la loi de Coulomb (coefficient f). Peut-on calculer son travail dans chaque cas ? La force est-elle conservative ?

EX 2 – Travail d'une force élastique

On considère un pendule élastique vertical constitué d'un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 , auquel est accrochée une masse m . Dans l'état initial la masse est en A et le ressort est à sa longueur à vide. Dans l'état final la masse est en B à sa position d'équilibre.

Calculer le travail entre A et B de la force de rappel du ressort et du poids.

EX 3 – Pendule simple : équilibre et stabilité

Un point matériel M de masse m est accroché à un fil de masse négligeable et de longueur l dont l'autre extrémité est attachée en un point fixe O . On repère la position du pendule par l'angle θ qu'il fait avec la verticale. On néglige tout frottement.

1. Déterminer les positions d'équilibre du point M .
2. Discuter de leur stabilité.

Mêmes questions dans le cas d'une bille en contact avec l'extérieur d'un cylindre, puis en contact avec l'intérieur.

EX 4 – Angle limite de décollement

Un point matériel M de masse m est posé au sommet d'un demi-cylindre circulaire de rayon a . Ce demi-cylindre est parfaitement glissant sur sa périphérie et est fixé sur un plateau horizontal. A la suite d'une perturbation, la masse m se met en mouvement. On constate que m quitte le demi-cylindre à partir d'un point A tel que OA fait un angle θ_0 avec la verticale. Déterminer cette valeur ainsi que la norme v_0 de la vitesse de M en A .

Que devient ensuite la trajectoire de M ?

EX 5 – Oscillations d'une masse sur une tige

On considère une masse m pouvant glisser sur une tige horizontale selon un axe fixe définissant l'axe O_x . La masse est attachée à un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0 , dont l'autre extrémité est fixe. A l'instant initial, le ressort possède une longueur $l_0 + a$ et on le lâche sans vitesse.

On néglige tout frottement.

1. Par des considérations énergétiques, établir l'intégrale première du mouvement.
2. En dérivant l'équation précédente, montrer que l'on retrouve l'équation différentielle du mouvement donnée par le principe fondamental de la dynamique.
3. Représenter l'énergie potentielle E_p en fonction du degré de liberté du problème.

Préciser si le dispositif possède des positions d'équilibre, indiquer leur stabilité, discuter le caractère borné ou non du mouvement.

EX 6 – Vibration d'une molécule de HCl

La fréquence de vibration de la molécule de chlorure d'hydrogène HCl est $f = 8,5 \cdot 10^{13}$ Hz. On modélise la molécule par un atome d'hydrogène mobile relié à un atome à un atome de chlore fixe par un «ressort» de raideur k . On donne les masses atomiques molaires : $M_H = 1,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ et $M_{Cl} = 35,5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$, ainsi que le nombre d'Avogadro $\mathcal{N}_A = 6,02 \cdot 10^{23}$.

1. Justifier l'hypothèse d'un atome de chlore fixe.

2. Calculer la raideur k .
3. On admet que l'énergie mécanique de la molécule est égale à $\frac{1}{2}hf$, où $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ J.s est la constante de Planck. Calculer l'amplitude du mouvement de l'atome d'hydrogène.
4. Calculer sa vitesse maximale.

EX 7 – Mouvement d'un atome de gaz rare

On considère un atome de gaz rare de masse m interagissant avec un autre atome de gaz rare supposé fixe dans un référentiel galiléen¹. Le problème est vu de façon monodimensionnelle selon x , l'atome fixe étant situé en l'origine O . L'énergie potentielle correspondant à la force d'interaction \vec{F} qui s'exerce entre les deux atomes est modélisée par le *potentiel de Lennard-Jones* :

$$E_p(x) = 4E_0 \left[\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{x}\right)^6 \right]$$

où x désigne la distance intermoléculaire et σ est une distance caractéristique. L'énergie potentielle est prise nulle lorsque $x \rightarrow \infty$, c'est-à-dire lorsque les deux atomes sont infiniment éloignés.

1. Quel est le rôle et la signification de chacun des termes dans cette énergie potentielle ?
2. Discuter les différents mouvements possibles à l'aide du graphe de la fonction $E_p(x)$.
3. Établir l'expression de la distance d'équilibre x_0 entre les deux noyaux, en fonction de σ . Que représente la quantité E_0 ?
4. Donner l'expression de la force d'interaction moléculaire $F(x)$.
5. Montrer que, au voisinage de la position d'équilibre, $F(x)$ peut se mettre sous la forme $F(x_0 + \varepsilon) = -k\varepsilon$ avec k une constante et $\varepsilon \ll x_0$.
Vous mettrez k sous la forme \tilde{k}/x_0^2 où \tilde{k} sera exprimé en fonction de E_0 .
6. Exprimer alors la période T des petites oscillations de m autour de la position d'équilibre, en fonction de m , σ et E_0 .

¹. La théorie des systèmes de 2 points matériels permet de montrer que le cas où les 2 particules sont mobiles se ramène à une seule particule mobile de masse $m/2$, d'où cette hypothèse.

EX 8 – Mouvement d'un anneau sur un cerceau

Un anneau de masse m glisse sans frottement sur un cerceau vertical de rayon R et de centre O l'origine du repère. On travaille dans le repère cartésien Oxy , avec l'axe Oy vertical ascendant. Un ressort de longueur à vide négligeable est fixé à l'anneau et à un point A du cerceau de coordonnées $x = -R$ et $y = 0$.

1. Déterminer la ou les éventuelle(s) position(s) d'équilibre et leur stabilité.
2. Le cas échéant déterminer la période des petites oscillations au voisinage des positions d'équilibre stable.