Cinématique du point

EX 1 – Dépassement sauvage

Sur une route rectiligne, une voiture 1 de longueur ℓ et de vitesse v double un autocar de longueur L et de vitesse V. En face arrive une voiture 2 de longueur ℓ' à la vitesse v'.
Quelle est la distance minimale D entre l'avant de la voiture 1 et l'avant de la voiture 2 pour que le dépassement puisse se faire ?
A.N. : $\ell = \ell' = 4$m, $L = 20$m, $v = v' = 90$km.h^{-1} et $V = 72$km.h^{-1}

EX 2 – De la loi horaire au mouvement

Un mobile ponctuel décrit un mouvement dont la loi horaire en coordonnées polaires correspond à une rotation uniforme $\theta(t) = \omega.t$ et un éloignement uniforme $r(t) = r_0 + v.t$ (ω et v sont donc des constantes).

1. Etablir les coordonnées des vecteurs vitesse et accélération dans la base polaire.
2. Exprimer l'équation intrinsèque de la trajectoire. De quel type de trajectoire s'agit-il ? Tracer son allure et tracer le vecteur vitesse à la date $t = 0$, puis en $\theta = \frac{\pi}{2}$, π et $\frac{3\pi}{2}$.

EX 3 – Du mouvement à la loi horaire

Un mobile M se déplace avec un vecteur vitesse dont les composantes dans la base cylindrique sont $\vec{v} = (0, v_\theta, v_z)$, où v_θ et v_z sont des constantes. A la date $t = 0$, M a pour coordonnées cylindriques $(r_0, 0, 0)$. Déterminer les lois horaires du mouvement en coordonnées cylindriques. En déduire la trajectoire de M.

EX 4 – Une autre trajectoire paramétrée

Par rapport à un repère fixe orthonormé $Oxyz$, on considère un point mobile dont la trajectoire est donnée par la loi horaire suivante (écrite sous forme numérique) :

$$x(t) = 4t^2 \quad , \quad y(t) = 4(t - t^3/3) \quad \text{et} \quad z(t) = 3t + t^3 \,.$$

1. Déterminer le vecteur vitesse et sa norme. Existe-t-il des points singuliers ?
2. Montrer que la tangente à la trajectoire fait un angle constant avec l'axe Oz, et donner sa valeur.

EX 5 – Distance de freinage

Une voiture roule sur une route rectiligne à vitesse constante $v_0 > 0$. À un instant $t = 0$ le conducteur aperçoit un obstacle, mais ne commence à freiner qu'après un temps de réaction τ. Le freinage provoque une accélération $-A$ (avec $A > 0$), opposée à la vitesse (appelée dans le langage courant décélération).

1. Tracer l'allure de la vitesse en fonction du temps, en distinguant les différentes phases.
2. Donner l'expression de la distance D parcourue par le véhicule depuis l'instant $t = 0$ jusqu'à l'arrêt. Indiquer le temps de freinage tf.
3. Calculer D et t_f pour $\tau = 0.5$ s, $A = 8$ m.s^{-2} pour une vitesse $v_0 = 80$ km/h, puis $v_0 = 120$ km/h.
4. En supposant que le véhicule se trouvait à 70 m de l'obstacle à $t = 0$, déterminer (en km/h) la vitesse maximale $v_{0,max}$ lui permettant d'éviter la collision.

EX 6 – Un exemple de mouvement circulaire

Un point M se déplace sur un cercle de centre O et de rayon $R = 1,0\,$m. L'angle $\theta = (\widehat{\vec{u}_x ; \vec{OM}})$ vérifie la loi horaire $\theta(t) = \pi \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right)$ avec $T = 1,0\,$s.

1. Au bout de combien de temps M passe-t-il par la position telle que $\theta = \frac{\pi}{2}$?
2. Que vaut alors le vecteur vitesse, puis le vecteur accélération ?
3. Pour quelle(s) valeur(s) de θ le module du vecteur accélération est-il maximal ?

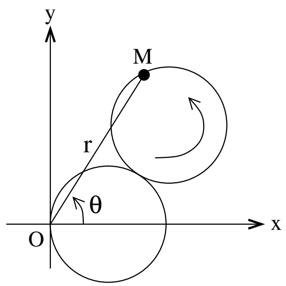
EX 7 – Mouvement cycloïdal (roulement sans glissement)

Une roue de rayon R roule sans glisser sur un axe Ox. Le mouvement de la roue est paramétré par l'angle $\theta(t)$ dont a tourné un rayon de la roue à partir de sa position initiale. Le véhicule a une vitesse $\vec{v} = v\vec{u}_x$ constante.

1. Quelles sont, en fonction de R et θ, les coordonnées du point M de la périphérie de la roue qui coïncidait pour $\theta = 0$ avec l'origine O ?
2. Calculer en fonction de R et θ et de ses dérivées les vecteurs vitesse et accélération.
3. Dessiner la trajectoire et représenter les vecteurs vitesse et accélération lorsque le point M touche le sol.
4. Exprimer la loi horaire $\theta(t)$ en fonction de la vitesse v de translation du véhicule selon $\vec{u}_x$, supposée constante.

EX 8 – Enfant sur un manège

Un manège est constitué de deux plateformes circulaires horizontales de même rayon R : l'une est immobile par rapport au référentiel terrestre, sa circonférence passe par l'origine O du repère et son centre est sur l'axe (O_x) ; l'autre roule sans glisser autour de la première avec une vitesse angulaire constante. Un enfant, assimilé au point M, a pris place sur la circonférence de la plateforme mobile. On note $\omega = \dot{\theta}$ la vitesse angulaire.



1. Montrer que [a] l'équation polaire de la trajectoire est $r = 2R\,(1 + \cos\theta)$.

[a] On pourra passer cette question si besoin.

2. Déterminer, en fonction du temps t et des deux constantes R et ω, les composantes du vecteur vitesse dans la base polaire. Le dessiner au point D tel que $\theta = \frac{3\pi}{2}$.

3. Faire de même pour le vecteur accélération.

4. Tracer l'allure de la trajectoire (s'aider de valeurs particulières et exploiter si besoin les vecteurs vitesse et accélération).

5. Calculer la norme du vecteur vitesse. Où la vitesse est-elle maximale ? Quelle est alors sa direction ? Où l'enfant peut-il descendre du manège ?

6. Calculer l'accélération dans la base polaire. La dessiner au point D. Calculer sa norme. Où est-elle maximale ?

EX 9 – Trajectoire elliptique d'une comète

Une comète, assimilée à un point matériel M, se déplace dans le plan (O_{xy}) sur une ellipse d'équation polaire $r = \frac{p}{1+e\cos\theta}$ où e et p sont des constantes, avec $0 < e < 1$.

A $t = 0$ il est au point P défini par $\theta = 0$, avec une vitesse $\overrightarrow{v_P} = v_P\,\vec{e}_y$ (avec $v_P > 0$).

1. Quelles sont les valeurs minimales et maximales de r ? Pour quelles valeurs de θ sont-elles obtenues ?

2. Faire un schéma de la trajectoire. Faire apparaître le point P, le point A le plus éloigné de O, le point H d'ordonnée maximale et le point B d'ordonnée minimale. En M quelconque de la trajectoire, faire apparaître la base locale cylindrique.

3. On suppose que l'accélération de M est toujours radiale. En déduire que $r^2\dot{\theta}$ est une constante, qu'on notera C. Déterminer C en fonction des données.

4. Déterminer la vitesse $\overrightarrow{v_A}$ de M au point A.

EX 10 – Mouvement d'un plaisancier

Un plaisancier utilise un G.P.S qui lui donne à tout instant sa latitude (λ) et sa longitude (φ). Sachant qu'il est à la surface de la Terre, il connaît ainsi ses coordonnées sphériques dans un référentiel $\mathcal{R}_T$ lié à la Terre : $r = R$, $\theta = \pi/2 - \lambda$, et $\varphi = \varphi$ avec $R = 6400\,\text{km}$.

Soient les points A, B, C, et D tels que : $\theta_A = 50°$ et $\varphi_A = 0°$, $\theta_D = 50°$ et $\varphi_D = 15°$, $\theta_B = 52°$ et $\varphi_B = 0°$, $\theta_C = 52°$ et $\varphi_C = 15°$. A est un point de la côte Est de l'Espagne, D est un point de la côte ouest italienne. Le plaisancier décrit le chemin $A \to B \to C \to D$.

1. Faire un schéma en perspective du trajet sur la sphère (on pourra artificiellement augmenter l'échelle du trajet !).

2. Exprimer la vitesse $\overrightarrow{v}_{M/\mathcal{R}_T}$ dans la base sphérique $(\overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{u}_\theta, \overrightarrow{u}_\varphi)$ pour chaque portion du parcours.

3. La norme de sa vitesse par rapport à $\mathcal{R}_T$ est constante : 20 km.h^{-1}. Déterminer $\dot{\theta}$ et $\dot{\varphi}$, puis $\theta(t)$ et $\varphi(t)$ pour chaque portion du parcours. Calculer la longueur des chemins AB, BC et CD.

4. Calculer la durée du voyage.

EX 11 – Orthodromie

On considère deux points sur une sphère. L'*orthodromie* est le nom donné à la trajectoire entre ces deux points la plus courte parmi les trajectoires inclues dans cette même sphère.

On considère un sphère de rayon R et de centre O, et deux points M et M' de coordonnées sphériques respectives (θ, φ) et (θ', φ') (colatitude et longitude).

1. On définit l'angle $\alpha = (\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}})$. Montrer que

$$\cos\alpha = \sin\theta\,\sin\theta'\,\cos(\varphi - \varphi') + \cos\theta\,\cos\theta'$$

2. En déduire la longueur $\ell_{MM'}$ de l'orthodromie allant de M à M' en fonction des coordonnées de M et M'.