Géométrie

EX 1 – Hauteur d'un tétraèdre

Dans l'espace on considère un tétraèdre $OABC$ dont les trois arêtes issues de O sont deux à deux orthogonales. Le point O se projette orthogonalement en H sur le plan ABC. On note $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, et $\mathcal{S}$ l'aire du triangle ABC.

1. Montrer que H est l'orthocentre[1] du triangle ABC.

2. La droite (CH) coupe (AB) en K. Montrer que les droites (OK) et (AB) sont perpendiculaires.

3. Calculer OK en fonction de a et b.

4. Calculer CK^2. En déduire la relation $S^2 = \frac{1}{4}\left(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2\right)$.

5. En calculant de deux manière le volume du tétraèdre[2], démontrer la relation

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\,.$$

6. Redémontrer cette relation en utilisant les *cosinus directeurs*[3] de $\overrightarrow{OH}$.

EX 2 – Droites et plans

Dans le repère cartésien $Oxyz$, on considère les points $A(-1,1,0)$ et $B(2,-3,1)$, et les vecteurs $\vec{u} = (0,1,1)$ et $\vec{v} = (-3,5,0)$. On définit les droites $(d) = (A,\vec{u})$ et $(d') = (B,\vec{v})$, et le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x - 2y + 3z + 1 = 0$.

1. Exprimer les équations paramétrées des droites (d) et (d').

2. Montrer qu'elles sont sécantes en un point I dont on donnera les coordonnées.

3. Trouver trois points de $\mathcal{P}$ à coordonnées entières, non alignés.

4. En déduire deux vecteurs $\vec{r}$ et $\vec{s}$ directeurs de $\mathcal{P}$ non colinéaires.

5. Montrer, en utilisant ces deux vecteurs et sans calcul d'intersection, que (d) et $\mathcal{P}$ sont sécants.

1. Le point d'intersection des trois hauteurs du triangle.
2. $\mathcal{V}_{\text{tétraèdre}} = \frac{1}{3} \times \text{base} \times \text{hauteur}$
3. Les cosinus apparaissant dans les projections orthogonales de $\overrightarrow{OH}$ selon (OA), (OB) et (OC).

EX 3 – Perpendiculaire commune à deux droites non coplanaires

Dans un repère orthonormé, on considère le cube dont les sommets sont

$$A(0;0;0),\ B(1;0;0),\ C(1;1;0),\ D(0;1;0),\ E(0;0;1),\ F(1;0;1),\ G(1;1;1),\ H(0;1;1)\,.$$

Soient I et J les milieux respectifs des arêtes $[HG]$ et $[FB]$. La droite (EG) coupe (FI) en K et la droite (FC) coupe (GJ) en L.
Montrer que la droite (KL) est la perpendiculaire commune aux droites (EG) et (FC).

EX 4 – Distance d'un point à un plan, à une droite

Dans le repère cartésien $Oxyz$, on considère deux points $M(x,y,z)$ et $A(a,b,c)$, et un vecteur $\vec{u} = (\alpha,\beta,\gamma)$.

1. Montrer que la distance d entre M et le plan passant par A et de normale $\vec{u}$ s'écrit :

$$d = \frac{|\alpha(x-a) + \beta(y-b) + \gamma(z-c)|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}$$

2. Montrer que la distance d entre M et la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ s'écrit :

$$d = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - \frac{\left(\alpha(x-a) + \beta(y-b) + \gamma(z-c)\right)^2}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}$$

EX 5 – Rotation dans le plan

Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé direct du plan . On définit une nouvelle base $(\vec{I},\vec{J})$ par rotation de la première d'un angle $\frac{\pi}{4}$.

1. Calculer $\vec{I}$ et $\vec{J}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$.

2. Montrer que si (x,y) sont les coordonnées d'un point dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, et si (X,Y) sont les coordonnées dans $(O,\vec{I},\vec{J})$, alors

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \quad \text{et} \quad Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x+y)$$

3. On considère l'hyperbole d'équation $xy = \frac{a^2}{2}$ dans l'ancien repère. Montrer que son équation dans le nouveau repère est $X^2 - Y^2 = a^2$.

4. La tracer dans le nouveau repère en représentant les asymptotes et les points remarquables.

EX 6 – Section plane d'un cylindre

Un couvreur doit réaliser un tuyau de ventilation vertical cylindrique de rayon R, à souder sur une toiture en zinc dont la pente est d'angle α avec l'horizontale [4]. Pour éviter une découpe imparfaite du cylindre, l'artisan réalise d'abord une surface développée plane à partir d'une feuille de zinc rectangulaire de dimensions $2\pi R \times H$ dont la base doit être ensuite redécoupée selon un profil $z = f(x)$ (x désigne l'abscisse selon le côté de longueur $2\pi R$). Puis il enroule cette feuille et la soude selon l'autre bord.
Trouver la loi $z = f(x)$ de la section sur la surface développée.

EX 7 – Fabrication d'un cône

Pour réaliser un cône droit, on dispose d'un disque de papier de rayon R, dont on retire un secteur angulaire d'angle α. En réunissant les deux bords de l'échancrure ainsi pratiquée, on obtient le cône dont on note h la hauteur et r le rayon de la base.

1. Calculer le périmètre de la base en fonction de R et de α.
2. En déduire l'expression de r en fonction de R et α.
3. Montrer que $h = \frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi\alpha - \alpha^2}$.
4. Montrer que le volume du cône vaut $\mathcal{V} = \frac{R^3}{6}\left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right)^2\sqrt{4\pi\alpha - \alpha^2}$.
5. En déduire l'expression de $\mathcal{V}(h)$, le volume en fonction de h.
6. Étudier les variations de $\mathcal{V}(h)$ sur l'intervalle $[0; R]$. En déduire la valeur de l'angle α telle que le volume soit maximal.

EX 8 – Hyperboloïde de révolution

Dans le repère cartésien $Oxyz$, on considère l'hyperbole du plan Oyz d'équation

$$y^2 - z^2 = a^2\,.$$

On génère une hyperboloïde Γ par rotation de cette courbe autour de l'axe (Oz).

1. Montrer que l'équation de Γ est $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$.
2. Que représente pour Γ l'ensemble $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 0$?
3. Soit h un réel positif. Montrer que le volume intérieur à Γ compris entre les plans $z = 0$ et $z = h$ s'écrit $\mathcal{V} = \pi a^2 h + \frac{1}{3}\pi h^3$.
4. Interpréter ce résultat pour h petit et pour h grand.

4. Pour la réalisation du chapeau de ventilation, voir l'exercice suivant.

EX 9 – Définitions monofocale et bifocale de l'ellipse

Dans un repère orthonormé du plan on considère l'ensemble

$$\mathcal{E} = \{M(x,y); 3x^2 + 4y^2 = 12\}\,.$$

Soient d'autre part les point $F(1;0)$ et $F'(-1;0)$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x = 4$. Pour tout point M du plan, on définit son projeté orthogonal H sur $\mathcal{D}$.

1. Définition monofocale : montrer que $M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow MH = 2MF$.
2. Définition bifocale : montrer que $M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow MF + MF' = 4$.

EX 10 – Applications diverses des barycentres

1. Soit ABC un triangle équilatéral. Déterminer le lieu des points M vérifiant $||2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|| = ||\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}||$.
2. Soit un tétraèdre quelconque $ABCD$ et G l'isobarycentre de ses sommets.
   a) Montrer que les droites passant par les milieux de deux arêtes qui se font face sont concourantes en G.
   b) Montrer que les droites joignant un sommet à l'isobarycentre de la face opposée sont concourantes en G.
   c) On note H l'isobarycentre du triangle BCD. Localiser G en fonction de A et H.
   d) On note I le milieu de $[AH]$, et J, K, et L les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[AC]$ et $[AD]$. Montrer que les points I, J, K, et L sont coplanaires.

EX 11 – Règle des sinus

On considère un triangle de sommets A, B et C, dont les angles internes associés respectivement à ces sommets sont α, β et γ. On note $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$.
En raisonnant à partir de l'aire $\mathcal{S}$ du triangle, retrouver la *règle des sinus* :

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{abc}{2S}$$

EX 12 – Un barycentre remarquable : le centre du cercle inscrit

On considère un triangle de sommets A, B et C, dont les angles internes associés respectivement à ces sommets sont α, β et γ. On note $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$.

1. Démontrer le fait que le centre du cercle inscrit se trouve sur le point de concours des bissectrices des angles internes du triangle.

2. On note I le point d'intersection entre la bissectrice de l'angle α et le côté $[BC]$. A l'aide de la règle des sinus, démontrer que

$$\frac{IB}{c} = \frac{IC}{b}$$

3. Montrer que I est la barycentre de B et C pour des poids que l'on explicitera.

4. On note $\Omega = \text{Bar}\left\{(A, a), (B, b), (C, c)\right\}$. Montrer que $\Omega \in (AI)$.

5. En déduire que Ω est le centre du cercle inscrit.