

ÉLECTROCINÉTIQUE ET ONDES

I. Chaîne de traitement du signal d'un magnétomètre (inspiré de E3A PSI 2019)

1. Comme $B = \mu H - aH^3$, on obtient
$$e = -S(\mu - 3aH^2) \frac{dH}{dt}$$

2. On a $H(t) = nI_m \sin(\omega_e t) + \frac{B_0}{\mu}$. On linéarise les termes de $e(t)$ apparaissant comme des produits de fonctions sinusoïdales puis on les ordonne dans un ordre de fréquences croissantes :

$$\begin{aligned} e &= (-\mu + 3aH^2) S \frac{dH}{dt} \\ &= \left(-\mu + 3a \left(n^2 I_m^2 \sin^2(\omega_e t) + \frac{B_0^2}{\mu^2} + \frac{2nB_0}{\mu} I_m \sin(\omega_e t) \right) \right) S n I_m \omega_e \cos(\omega_e t) \\ &= \left(-\mu + 3a \frac{B_0^2}{\mu^2} + \frac{3}{2} a n^2 I_m^2 (1 - \cos(2\omega_e t)) + \frac{6anB_0}{\mu} I_m \sin(\omega_e t) \right) S n I_m \omega_e \cos(\omega_e t) \\ &= \left(-\mu + 3a \frac{B_0^2}{\mu^2} + \frac{3}{2} a n^2 I_m^2 - \frac{3}{2} a n^2 I_m^2 \cos(2\omega_e t) + \frac{6anB_0}{\mu} I_m \sin(\omega_e t) \right) S n I_m \omega_e \cos(\omega_e t) \end{aligned}$$

En notant que $2 \sin(\omega_e t) \cdot \cos(\omega_e t) = \sin(2\omega_e t)$ et $\cos(2\omega_e t) \cdot \cos(\omega_e t) = \frac{1}{2}(\cos(\omega_e t) + \cos(3\omega_e t))$, on obtient finalement¹ :

$$e(t) = K_1 \cos(\omega_e t) + K_2 \sin(2\omega_e t) + K_3 \cos(3\omega_e t), \text{ avec}$$

$$\begin{aligned} K_1 &= \left(-\mu + 3a \frac{B_0^2}{\mu^2} + \frac{3}{4} a n^2 I_m^2 \right) S n I_m \omega_e \\ K_2 &= 3a n^2 I_m^2 S \omega_e \frac{B_0}{\mu} \\ K_3 &= -\frac{3}{4} a n^3 I_m^3 S \omega_e \end{aligned}$$

On constate que K_2 est simplement proportionnelle à B_0 , ce qui justifie que l'on souhaite extraire uniquement la composante $2\omega_e$.

3. Pour un filtre passe-bande, la fonction de transfert en régime sinusoïdal forcé de pulsation ω s'écrit

$$\underline{H} = \frac{H_0 j \frac{x}{Q}}{1 + j \frac{x}{Q} - x^2} = \frac{H_0}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right)} \text{ avec } x = \frac{\omega}{\omega_0},$$

où ω_0 est la pulsation propre, Q est le facteur de qualité, et H_0 est la valeur de la fonction de transfert à la résonance, en $x = 1$ (cf question suivante).

4. On a $G(x) = |\underline{H}| = \frac{|H_0|}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2}}$, fonction qui est maximale lorsque $Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2$ est minimale,

c'est-à-dire en $x = 1$, c'est-à-dire en $[\omega = \omega_0]$. On a alors un gain maximal $G_{\max} = |H_0|$.

5. La bande passante à -3dB correspond à l'intervalle de pulsation (ou de fréquences) vérifiant

$$G_{\text{dB}}(x) \geq G_{\text{dBmax}} - 3,0 \text{ dB} = 20 \log G_{\max} - 20 \log \sqrt{2} = 20 \log \left(\frac{G_{\max}}{\sqrt{2}} \right) \Leftrightarrow G(x) \geq \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$$

Les pulsations de coupure ω_{c1} et ω_{c2} qui vérifient $G(\omega_c) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$ vérifient $\Delta\omega = |\omega_{c2} - \omega_{c1}| = \frac{\omega_0}{Q}$.

1. Les expressions de K_1 et K_3 n'étaient pas exigées pour alléger le calcul

6. À basse fréquence, c'est-à-dire lorsque $\omega \ll \omega_0$ on a

$$\underline{H} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} H_0 j \frac{x}{Q} \Leftrightarrow \forall t, \underline{s}(t) \approx \frac{H_0}{Q\omega_0} j\omega_e \underline{e}(t) \Leftrightarrow \forall t, s(t) \approx \frac{H_0}{Q\omega_0} \frac{de}{dt}$$

Le filtre a un comportement dérivateur à basse fréquence.

À haute fréquence, c'est-à-dire lorsque $\omega \gg \omega_0$ on a

$$\underline{H} \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{H_0}{jQx} \Leftrightarrow \forall t, \underline{s}(t) \approx \frac{H_0\omega_0}{Q} \frac{\underline{e}(t)}{j\omega} \Leftrightarrow \forall t, s(t) \approx \frac{H_0\omega_0}{Q} \int e(t)$$

Le filtre a un comportement intégrateur à haute fréquence.

7. On souhaite que le filtre passe-bande prélève la composante de pulsation $2\omega_e$ et élimine les autres, donc on fixe $[\omega_0 = 2\omega_e]$.

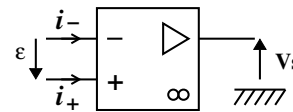
Sous l'hypothèse de composantes de même amplitude ($K_1 = K_2 = K_3$), le rapport des amplitudes des différentes composantes en sortie de filtre est le rapport des gains pour les pulsations considérées. On a

- $G(\omega = \omega_0 = 2\omega_e) = G(x = 1) = G_{\max}$;
- $G(\omega = \omega_e) = G(x = 1/2) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{1 + Q^2(\frac{1}{2} - 2)^2}} = \frac{G_{\max}}{\sqrt{1 + Q^2 \frac{9}{4}}}$;
- $G(\omega = 3\omega_e) = G(x = 3/2) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{1 + Q^2(\frac{3}{2} - \frac{2}{3})^2}} = \frac{G_{\max}}{\sqrt{1 + Q^2 \frac{25}{36}}}$.

Ainsi on a $G(x = 1/2) < G(x = 3/2)$ donc on veut imposer

$$G(x = 3/2) \leq \frac{G_{\max}}{10} \Leftrightarrow 1 + Q^2 \frac{25}{36} \geq 100 \Leftrightarrow Q \geq \frac{6\sqrt{99}}{5} \approx 12.$$

8.



La caractéristique donnant la tension de sortie V_s en fonction de la tension différentielle d'entrée ε est donnée ci-contre. On observe un régime linéaire au centre, de gain infini et tel que $[\varepsilon = 0]$, et deux régimes de saturation de part et d'autre :

$$V_s = V_{\text{sat}} \text{ si } \varepsilon > 0 \text{ et } V_s = -V_{\text{sat}} \text{ si } \varepsilon < 0.$$

D'autre part, les courants de polarisation sont considérés nuls :

$$i_+ = i_- = 0.$$

9. La boucle de rétroaction présente sur l'entrée E^- nous permet de supposer que l'ALI est stable en régime linéaire. Ainsi on a $V^- = V^+ = 0$.

La loi des nœuds en termes de potentiel s'écrit donc en A

$$\underline{V}_A (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_4 + \underline{Y}_5) = \underline{Y}_1 \underline{\varepsilon} + \underline{Y}_4 \underline{s}, \tag{1}$$

et en E^-

$$0 = \underline{Y}_3 \underline{s} + \underline{Y}_5 \underline{V}_A. \tag{2}$$

En injectant cette dernière équation dans la précédente on obtient

$$-\underline{s} \underline{Y}_3 (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_4 + \underline{Y}_5) = \underline{Y}_1 \underline{Y}_5 \underline{\varepsilon} + \underline{Y}_4 \underline{Y}_5 \underline{s} \Leftrightarrow \underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{\varepsilon}} = \frac{-\underline{Y}_1 \underline{Y}_5}{\underline{Y}_4 \underline{Y}_5 + \underline{Y}_3 (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_4 + \underline{Y}_5)}. \tag{3}$$

10. Le dénominateur correspond, une fois mis sous forme canonique, au polynôme en $j\omega$ d'ordre 2

$$1 + \frac{j\omega}{\omega_0 Q} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2$$

tandis que le numérateur correspondra au monôme $H_0 j \frac{\omega}{\omega_0 Q}$. Or les admittances valent soit $\frac{1}{R}$ soit $j\omega C$,

et on a déjà imposé $Y_3 = \frac{1}{R}$. Donc nécessairement le terme de degré 2 est $Y_4 \cdot Y_5$, avec $Y_4 = Y_5 = j\omega C$

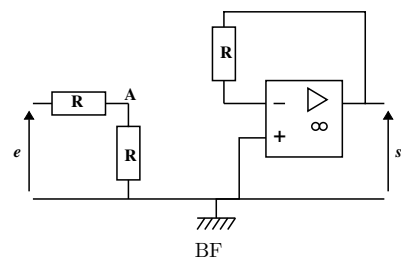
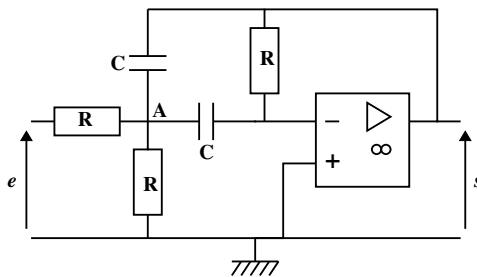
qui sont des capacités. Cela implique qu'au numérateur $Y_1 = \frac{1}{R}$ est constituée par une résistance. Il nous reste donc deux choix possibles pour Y_2 . Pour maximiser le facteur de qualité et donc minimiser le facteur $\frac{1}{Q}$ devant les termes $\frac{j\omega}{\omega_0}$, on a intérêt à prendre $Y_2 = \frac{1}{R}$ pour ne pas ajouter un terme en $j\omega$.

11. Si on choisit $Y_3 = j\omega C$, alors le terme constant au dénominateur est nécessairement $Y_4 \cdot Y_5$, donc on y place des résistances : $Y_4 = Y_5 = \frac{1}{R}$. Pour le numérateur cela impose donc $Y_1 = j\omega C$. On a de nouveau le choix pour Y_2 . Cette fois on maximise le facteur de qualité en y plaçant une capacité, donc $Y_2 = j\omega C$, pour éviter d'ajouter un terme d'ordre 1. Finalement, on a simplement échangé tous les composants indiqués dans la solution précédente.

12. Le circuit explicite est représenté ci-contre. À Basse Fréquence (BF) le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert, alors qu'à Haute Fréquence (HF) il se comporte comme un fil, d'où les circuits asymptotiques ci-dessous.

- À BF : $s = V^- + Ri_- = V^-$ car $i_- = 0$. Or $V^- = V^+ = 0$ en régime linéaire. Donc $s = 0$. Les basses fréquences sont éliminées.
- À HF : $s = V^- = V^+ = 0$. Les hautes fréquences sont éliminées.

Il s'agit donc bien d'un filtre passe-bande.



13. En explicitant les admittances on obtient

$$H = \frac{-j\frac{\omega C}{R}}{-\omega^2 C^2 + \frac{1}{R}(\frac{2}{R} + 2j\omega C)} = \frac{-j\frac{\omega C}{R}}{\frac{2}{R^2} + j\frac{2\omega C}{R} - \omega^2 C^2} = \frac{-j\frac{\omega RC}{2}}{1 + j\omega RC - \frac{\omega^2 R^2 C^2}{2}}$$

d'où l'on tire

$$H = \frac{H_0 j \frac{x}{Q}}{1 + j \frac{x}{Q} - x^2} \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \omega_0 = \frac{\sqrt{2}}{RC}, \quad Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad H_0 = -\frac{1}{2}, \quad (4)$$

où $G_{\max} = |H_0|$ est le gain à la résonance.

Le facteur de qualité devrait être au moins de l'ordre de 7 au regard de la question 7. Il est donc 20 fois trop petit, le filtre n'est pas assez sélectif. Il faudrait prendre des valeurs de capacités ou de résistances différentes pour atteindre cette valeur.

14. On analyse les comportements asymptotiques pour obtenir les asymptotes du diagramme de Bode, et on ajoute le point $x = 1$. On note $\varphi = \arg(H)$ la phase de la fonction de transfert, et on note que $\arg(H_0) = \arg(-\frac{1}{2}) = \pi [2\pi]$.

x	H	G_{dB}	φ
$x \ll 1$	$\underset{x \rightarrow 0}{\sim} H_0 j \frac{x}{Q}$	$20 \log H_0 - 20 \log Q + 20 \log x$	$\frac{3\pi}{2}$
$x \gg 1$	$\underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{H_0}{jQx}$	$20 \log H_0 - 20 \log Q - 20 \log x$	$\frac{\pi}{2}$
$x = 1$	H_0	$20 \log H_0 $	π

avec

- $20 \log |H_0| - 20 \log Q = -20 \log 2 + 10 \log 2 = -3,0 \text{ dB}$;
- $20 \log |H_0| = -20 \log 2 = -6,0 \text{ dB}$.

On représente ci-dessous les diagrammes de Bode en gain et phase, avec les asymptotes en gras, et la courbe réelle en trait fin.

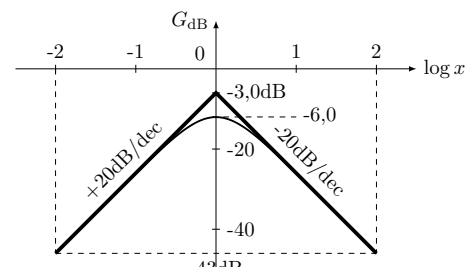


Diagramme de Bode en gain.

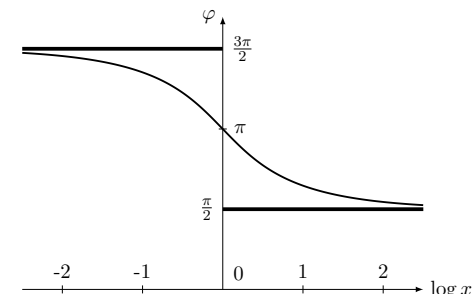


Diagramme de Bode en phase.

15. On remarque d'abord que les relations des Eqs. (1)-(2) obtenues par la loi des nœuds en termes de potentiel sont valables en présence d'une charge ou non. Donc la fonction de transfert H trouvée en Eq. (3) ne dépend pas de la charge, donc l'impédance de sortie est nulle : $Z_s = 0$.

En notant i_e le courant entrant dans $Y_1 = \frac{1}{R}$, et en réutilisant les Eqs. (1)-(4), on peut écrire

$$Ri_e = e - V_A = e - \frac{Y_1 e + Y_4 s}{Y_1 + Y_2 + Y_4 + Y_5} = e \left(1 - \frac{Y_1 + Y_4 H}{Y_1 + Y_2 + Y_4 + Y_5}\right) = e \left(1 - \frac{\frac{1}{R} + j\omega C H}{\frac{2}{R} + 2j\omega C}\right) \quad \text{d'où}$$

$$Z_e = \frac{e}{i_e} = R \left(1 - \frac{1 + \sqrt{2} j x H}{2 + 2\sqrt{2} j x}\right)^{-1} \quad \text{avec} \quad H = \frac{H_0 j \frac{x}{Q}}{1 + j \frac{x}{Q} - x^2}.$$

Ainsi l'impédance d'entrée n'est pas infinie, et dépend de la fréquence. Donc un quadripôle d'impédance de sortie non nulle verra sa fonction de transfert modifiée s'il est placé en amont de ce filtre. Comme elle est proportionnelle à R , on voit que l'on a intérêt à augmenter R autant que possible, et donc diminuer C en conséquence (pour maintenir la valeur de ω_0).

Pour information, on peut chercher les valeurs particulières de Z_e en utilisant les comportements de H étudiés en 14. :

$$Z_e(x=1) = 2R \frac{1 + \sqrt{2}j}{1 + \frac{3}{\sqrt{2}}j} ; \quad Z_e \xrightarrow{x \rightarrow 0} 2R \quad \text{et} \quad Z_e \xrightarrow{x \rightarrow \infty} R$$

16. On souhaite une résonance en $f_0 = 2f_e$, donc

$$2f_e = \frac{\sqrt{2}}{2\pi RC} \Leftrightarrow C = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}Rf_e}.$$

Pour avoir une impédance d'entrée relativement grande, on peut prendre $R = 10\text{ k}\Omega$, ce qui donne $C = 11\text{ nF}$, valeur facilement accessible. Pour améliorer l'impédance d'entrée, on pourrait aussi prendre $R = 100\text{ k}\Omega$ et $C = 1,1\text{ nF}$.

17. On a

$$\begin{aligned} s_2(t) &= K(s_p(t) + b(t))s_{\text{ref}}(t) \\ &= Ks_p(t)s_{\text{ref}}(t) + Kb(t)s_{\text{ref}}(t) \\ &= KAB \cos(2\omega_e t + \varphi) \cos(2\omega_e t) + Kb(t)s_{\text{ref}}(t) \end{aligned}$$

d'où

$$s(t) = \frac{K}{2}AB \cos \varphi + \frac{K}{2}AB \cos(4\omega_e t + \varphi) + Kb \cos(2\omega_e t) b(t).$$

Ce signal admet donc une composante continue $\frac{1}{2}KAB \cos \varphi$.

18. On cherche maintenant à choisir les admittances de façon à avoir une nouvelle fonction de transfert ² de la forme

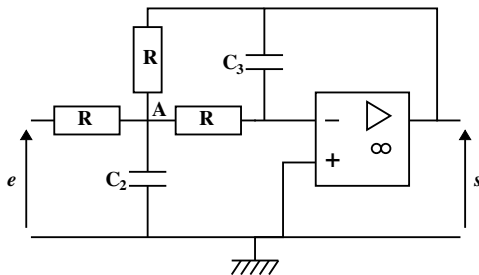
$$H' = \frac{s}{e} = \frac{-Y_1 \cdot Y_5}{Y_4 \cdot Y_5 + Y_3 \cdot (Y_1 + Y_2 + Y_4 + Y_5)} = \frac{H'_0}{1 + \frac{j\omega}{\omega'_0 Q'} + \left(\frac{j\omega}{\omega'_0}\right)^2}$$

Le numérateur doit être de degré 0 en $j\omega$ donc

$$Y_1 = Y_5 = \frac{1}{R}. \text{ Cela implique que } Y_3 = j\omega C$$

pour permettre l'existence d'un terme d'ordre 2 en $j\omega$. Par conséquent le terme $Y_4 \cdot Y_5$ constituera nécessairement le terme d'ordre 0, donc $Y_4 = \frac{1}{R}$.

Pour terminer on a nécessairement $Y_2 = j\omega C$ pour former le terme d'ordre 2 car tous les autres termes sont d'ordre inférieur.



19. On obtient

$$H = \frac{-\frac{1}{R^2}}{\frac{1}{R^2} + j\omega C_3 \left(\frac{3}{R} + j\omega C_2\right)} = \frac{-1}{1 + 3j\omega RC_3 - \omega^2 R^2 C_2 C_3}, \text{ d'où}$$

$$H = \frac{H'_0}{1 + j\frac{x}{Q'} - x^2} \text{ avec } x = \frac{\omega}{\omega'_0} \text{ et } \omega'_0 = \frac{1}{R\sqrt{C_2 C_3}}, Q' = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{C_2}{C_3}}, H'_0 = -1.$$

20.

$$Q' = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{C_2}{C_3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{C_2}{C_3} = \frac{9}{2}.$$

On peut montrer³ que cette valeur est la plus grande pour laquelle le gain n'admet pas de résonance. Cela est préférable pour un filtrage restituant au mieux (de façon plus uniforme) les basses fréquences sans réhausser les fréquences proches de la fréquence propre.

21. Comme $Q' = \frac{1}{\sqrt{2}}$, le gain vaut

$$G'(x) = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + 2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$$

donc la fréquence de coupure est égale à la fréquence propre $f'_0 = \frac{\omega'_0}{2\pi}$. Comme on doit éliminer la composante à $4f_e$ ainsi que le bruit (présent à toutes les fréquences), on choisit une fréquence de coupure

2. On a introduit des ω' pour différencier les expressions par rapport au filtre passe-bande précédent.

3. Il n'est pas demandé explicitement par l'énoncé de le démontrer...

suffisamment basse. Au maximum :

$$f'_0 = \frac{4f_e}{10} \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi \cdot \frac{3}{2} RC_3} = \frac{2f_e}{5} \Leftrightarrow C_3 = \frac{5}{2\sqrt{6}\pi R f_e} \text{ et } C_2 = \frac{9}{2} C_3.$$

Pour avoir une impédance d'entrée relativement grande, on peut prendre $R = 10\text{ k}\Omega$, ce qui donne $C_3 = 32\text{ nF}$ et $C_2 = 0,15\text{ }\mu\text{F}$. Un meilleur choix serait de prendre $R = 100\text{ k}\Omega$ et une coupure 10 fois plus basse,

$$f'_0 = \frac{4f_e}{100} = 40\text{ Hz}, \text{ ce qui conduit aux mêmes valeurs numériques de } C_2 \text{ et } C_3.$$

22. Le filtre joue le rôle de **moyenneur**, avec une fréquence de coupure très basse, donc le bruit est **supposé totalement éliminé**. La composante continue est multipliée par le gain statique $|H'_0| = 1$ et « déphasée » de $\arg(H'_0) = \pi$, d'où

$$s_3(t) = \frac{1}{2}KAB \cos \varphi |H_0| \cos(\pi) = -\frac{1}{2}KAB \cos \varphi$$

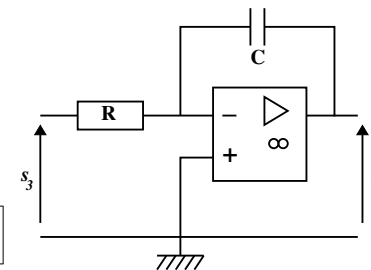
23.

On réalise le montage ci-contre. Le théorème de Millman à l'entrée E^- s'écrit

$$V^- = \frac{s_3}{R} + j\omega C s_4$$

Or la boucle de rétroaction sur l'entrée E^- stabilise l'ALI en régime linéaire, donc $V^- = V^+ = 0$. On en déduit

$$\forall t, s_4(t) = -\frac{s_3(t)}{j\omega RC} \Leftrightarrow \forall t, s_4(t) = -\frac{1}{RC} \int s_3(t)$$

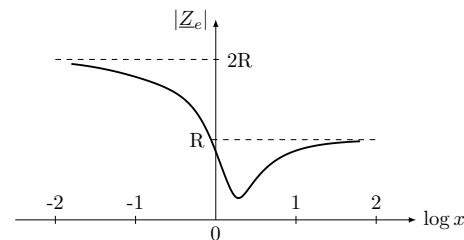


24. En sortie de détection synchrone, le signal s_3 est constant et proportionnel au champ statique total $B_{0\text{tot}} = B_0 + B_{0\text{comp}}$. Donc en sortie de l'intégrateur on récupère un signal $s_4(t) = s_3 \frac{t}{RC} + \text{constante}$ (la constante d'intégration est nulle si condensateur de l'intégrateur est déchargé initialement). Ainsi, tant que le champ statique total $B_{0\text{tot}} = B_0 + B_{0\text{comp}}$ est non nul, alors s_4 croît ou décroît ce qui permet de modifier le courant de compensation pour augmenter ou diminuer le champ de compensation⁴. Lorsque l'asservissement a atteint son état stationnaire, on obtient $B_{0\text{tot}} = 0$ et $s_4(t) = \text{constante}$.

25. Comme $B_{0\text{tot}} = 0$, le champ statique externe vérifie $B_0 = -B_{0\text{comp}}$. Il suffit donc de mesurer le courant de compensation⁵ pour remonter à B_0 .

ANNEXE

Pour information on a tracé ci-dessous l'évolution du module de l'impédance d'entrée $|Z_e|$ du filtre passe-bande en fonction de la pulsation réduite en diagramme logarithmique. Cela confirme que cette impédance reste de l'ordre de R quelle que soit la fréquence.



4. Il faut donc ajuster correctement le signe de la transmittance du convertisseur tension-courant, qui en l'occurrence ici devrait être positive car K_2 , et $A = \frac{K_2}{2}$ croissent lorsque $B_{0\text{tot}}$ croît.

5. Nous verrons dans la partie Induction que l'on a approximativement $B_{0\text{comp}} = \mu n_c i_c$, où n_c et i_c sont respectivement le nombre de spires par unité de longueur et le courant dans la bobine de compensation.

II. Modes propres dans une fibre à saut d'indice (d'après IPHO 2013)

1. À l'instant t et sur le plan d'onde BB' , le déphasage de l'onde deux fois réfléchi par rapport à l'onde incidente originale vaut⁶

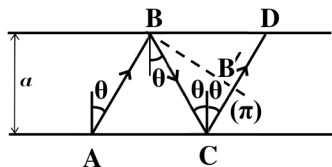
$$\Delta\varphi = -\frac{2\pi}{\lambda_0} n_1 (BC + CB')$$

En reportant l'angle θ comme indiqué ci-contre, on voit que

$$BC = \frac{a}{\cos\theta} \quad \text{et} \quad CB' = BC \cos(2\theta).$$

$$\text{D'où : } BC + CB' = a \frac{1 + \cos(2\theta)}{\cos\theta} = a \frac{2\cos^2\theta}{\cos\theta} = 2a \cos\theta.$$

$$\text{Et donc } \Delta\varphi = -\frac{4\pi a n_1}{\lambda_0} \cos\theta.$$



2. Le mode propre va pouvoir se propager dans toute la fibre si les ondes se propageant dans la même direction après des réflexions successives **interfèrent constructivement**, c'est-à-dire si

$$\exists p \in \mathbb{N}, \Delta\varphi = -2p\pi \Leftrightarrow \cos\theta_p = p \frac{\lambda_0}{2an_1} \Leftrightarrow \theta_p = \arccos\left(p \frac{\lambda_0}{2an_1}\right).$$

3. D'après l'expression ci-dessus, θ_p diminue quand p augmente. Or θ_p ne doit pas être inférieur à θ_ℓ pour que la réflexion totale se produise. Ainsi

$$\theta_p \geq \theta_\ell \Leftrightarrow \cos\theta_p \leq \cos\theta_\ell \Leftrightarrow p \frac{\lambda_0}{2an_1} \leq \cos\left(\arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)\right) \Leftrightarrow p \leq \frac{2an_1}{\lambda_0} \sqrt{1 - \sin^2\left(\arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)\right)}$$

$$\text{d'où } p \leq N = E\left(\frac{2a}{\lambda_0} \sqrt{n_1^2 - n_2^2}\right)$$

où $E()$ représente la partie entière. Pour $a = 0,1 \text{ mm}$ et $\lambda_0 = 1,5 \times 10^{-6} \text{ m}$, on obtient $N + 1 = 49$ modes propres guidés ($p = 0$ possible).

4. On ré-exprime la condition de réflexion totale en fonction de la fréquence f en introduisant la célérité de la lumière dans le vide c :

$$\cos\theta_\ell \geq \cos\theta_p = p \frac{\lambda_0}{2an_1} = p \frac{c}{2an_1 f} \Leftrightarrow f \geq f_p = \frac{pc}{2a\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}.$$

Ainsi, chaque mode propre θ_p est effectivement guidé si sa fréquence est supérieure f_p . Il s'agit donc d'un comportement de filtre passe-haut de fréquence de coupure f_p (la coupure est nette et non progressive comme dans un filtre linéaire analogique d'ordre fini).

5. En reprenant le résultat de 3., on impose que $N = 0$ pour que seul le mode $p = 0$ soit possible :

$$\frac{2a}{\lambda_0} \sqrt{n_1^2 - n_2^2} < 1 \Leftrightarrow a < a_{\max} = \frac{\lambda_0}{2\sqrt{n_1^2 - n_2^2}} = 2,1 \mu\text{m}.$$

6. Il n'y a pas de déphasage de π à considérer à la réflexion car $n_2 < n_1$ (cf SPE). Quoi qu'il en soit cela ne changerait rien pour les conditions d'interférences constructives puisqu'il y a deux réflexions.

III. Ondes capillaires dans une cuve à ondes

1. $\lambda = \frac{c}{f} = 3,6 \text{ mm}.$

2. $\vec{k} = +k\vec{u}_x$ avec $k = \frac{2\pi f}{c}$ pour un milieu non dispersif.

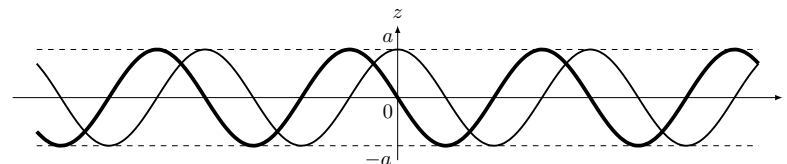
3. L'onde progressive se propage à la vitesse c selon les x croissant sans déformation (milieu non absorbant et non dispersif). Donc à l'instant t , le signal est observé à la position x avec un retard $\frac{x}{c}$ par rapport au signal en $x = 0$. Donc $z(x, t) = z\left(0, t - \frac{x}{c}\right)$.

$$\text{Ainsi : } z(x, t) = a \cos\left(\omega t - \omega \frac{x}{c}\right) \Rightarrow z(x, t) = a \cos(\omega t - kx).$$

- 4.

$$\begin{cases} z(x_M, t) = a \cos\left(\omega t - \frac{3k\lambda}{4}\right) = a \cos\left(\omega t - \frac{3\pi}{2}\right) = a \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \\ z(x_N, t) = a \cos(\omega t - 5k\lambda) = a \cos(\omega t - 5\pi) = a \cos(\omega t + \pi) \end{cases}$$

Les points M et N ont le même mouvement que S (sinusoïdal d'amplitude a et de fréquence f , trait fin ci-dessous), mais celui de M est déphasé de $+\frac{\pi}{2}$ [2π] (trait épais ci-dessous). L'onde paraît donc en avance de phase (quadrature) en M par rapport à la source S .

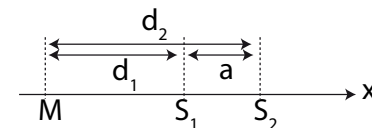


5. Le déphasage entre les deux ondes (1 par rapport à 2) vaut $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta$ en notant la différence de marche $\delta = S_2M - S_1M$. La condition d'interférence destructive s'écrit

$$\Delta\varphi = (2p + 1)\pi \Leftrightarrow \delta = d_2 - d_1 = (2p + 1)\frac{\lambda}{2} = \left(p + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad \text{avec } p \in \mathbb{Z}.$$

6. a)

Lorsque M est le long de l'axe Ox , la différence de marche vaut $\delta = d_2 - d_1 = \pm a$ (cf figure ci-contre, $-a$ si M est à droite de S_2).



Sur les lignes de vibration minimale $x < -\frac{a}{2}$ et $x > \frac{a}{2}$, on a alors :

$$\pm a = \pm(2p + 1)\frac{\lambda}{2} \quad \text{avec } p \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{a}{\lambda} = p + \frac{1}{2} \quad \text{avec } p \in \mathbb{N}.$$

- b) Sur le segment $[S_1S_2]$, la différence de marche $\delta = d_2 - d_1$ varie entre $-a$ et $+a$, donc

$$\frac{\delta}{\lambda} \in \left[-\left(p + \frac{1}{2}\right), \left(p + \frac{1}{2}\right)\right]$$

En chaque point de ce segment où la vibration est minimale, on a $\frac{\delta}{\lambda} = k + \frac{1}{2}$ avec $k \in \mathbb{Z}$, ce qui arrive $2(p + 1)$ fois ($p + 1$ fois pour $\delta > 0$ et $p + 1$ fois pour $\delta < 0$). D'après la figure il y a $2(p + 1) = 10$ telles positions donc $p = 4$ et $\frac{a}{\lambda} = 4,5$.