

# ÉLECTROCINÉTIQUE ET ONDES

Soignez la présentation et la rédaction, qui doit être complète et concise. Tout résultat doit être justifié, et mis en valeur. Les résultats doivent d'abord être écrits sous forme littérale et doivent être homogènes. Les résultats numériques doivent avoir un nombre de chiffres significatifs vraisemblable. Les schémas doivent être clairs, suffisamment grands et lisibles. Si vous n'arrivez pas à montrer un résultat, admettez-le clairement et poursuivez.

## CALCULATRICES AUTORISÉES

### I. Chaîne de traitement du signal d'un magnétomètre

Ce problème aborde quelques aspects d'un dispositif de mesure du champ magnétique statique (composante stationnaire) : le magnétomètre à vanne de flux (fluxgate magnetometer en anglais). Ce dispositif a été inventé par les physiciens allemands Aschenbrenner et Goubau en 1936, et repose sur la non-linéarité des matériaux ferromagnétiques (saturation de l'aimantation). Pendant la Seconde Guerre mondiale, il a été amélioré pour permettre la détection aérienne des sous-marins. Il est toujours utilisé de nos jours aussi bien dans l'exploration géologique que dans le domaine spatial.

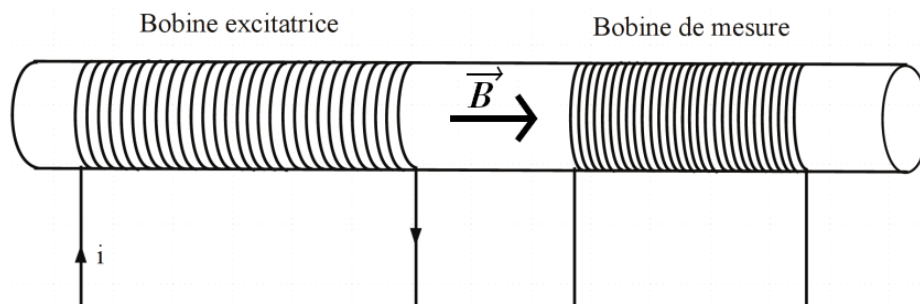


FIGURE 1 – Principe de la captation du champ magnétique : un barreau ferromagnétique support d'un double bobinage permet de mesurer le champ magnétique externe  $\vec{B}_0$  dirigé dans l'axe du barreau.

Le cœur du dispositif est représenté en Fig. (1). Un barreau ferromagnétique (fer doux) est aimanté selon son axe par l'effet conjugué d'un champ magnétique externe stationnaire  $\vec{B}_0$  que l'on cherche à mesurer, et d'un courant d'aimantation  $i(t)$  sinusoïdal circulant dans la bobine excitatrice. On mesure la tension  $e(t)$  qui apparaît aux bornes de la bobine de mesure.

Au sein du matériaux ferromagnétique, la relation entre le champ magnétique total  $\vec{B}$  et ses deux sources (le champ externe  $\vec{B}_0$  et le courant  $i$ ) se fait par l'intermédiaire du vecteur *excitation magnétique*  $\vec{H}$ , selon la relation idéalisée suivante :

$$B = \mu H - aH^3,$$

où  $\mu$  et  $a$  sont des constantes caractéristiques du matériau, et  $B$  et  $H$  les composantes des champs vectoriels dans l'axe du barreau (cf Fig. (2)). Quant à l'excitation magnétique, elle est reliée aux deux sources par

$$H = ni + \frac{B_0}{\mu},$$

où  $n$  est le nombre de spires par unité de longueur dans la bobine excitatrice.

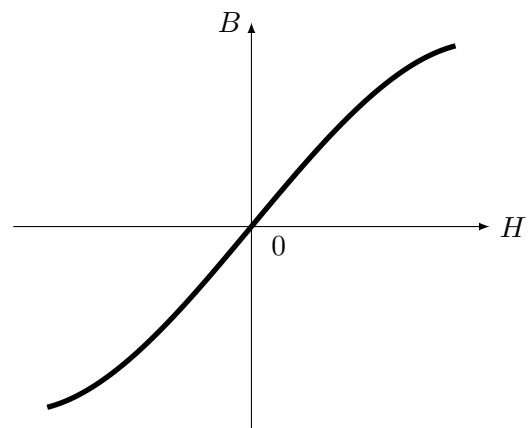


FIGURE 2 – Relation d'aimantation modélisée entre  $\vec{B}$  et  $\vec{H}$  dans un matériau ferromagnétique doux.

Le phénomène d'induction magnétique<sup>1</sup> qui a lieu dans la bobine de mesure génère une tension  $e$  à ses bornes :

$$e = -S \frac{dB}{dt}$$

où  $S$  est l'aire de la section transverse du barreau. On applique un courant d'excitation sinusoïdal  $i(t) = I_m \sin(\omega_e t)$  dans la bobine excitatrice.

1. Exprimer la tension mesurée  $e(t)$  en fonction de  $H$  et de sa dérivée  $\frac{dH}{dt}$ .
2. En déduire que la tension mesurée  $e(t)$  peut s'écrire comme la somme de trois composantes sinusoïdales

$$e(t) = K_1 \cos(\omega_e t) + K_2 \sin(2\omega_e t) + K_3 \cos(3\omega_e t),$$

où  $K_1$ ,  $K_2$  et  $K_3$  sont des constantes. Expliciter  $K_2$  (uniquement) en fonction des paramètres du problème.

Pour la suite, on admet que  $K_3$  ne dépend pas de  $B_0$ , et que  $K_1$  en dépend d'une façon qui n'est pas facilement exploitable. Ainsi, la mesure de  $B_0$  passe par la détermination de  $K_2$ .

### Mesure directe du champ magnétique externe

Le schéma partiel de traitement du signal permettant d'accéder directement à la mesure de  $B_0$  via  $K_2$  est représenté en fig. (3). En pratique le signal  $i(t)$  utilisé pour alimenter la bobine excitatrice possède une fréquence  $f_e$  typiquement comprise entre 1 kHz et 10 kHz.

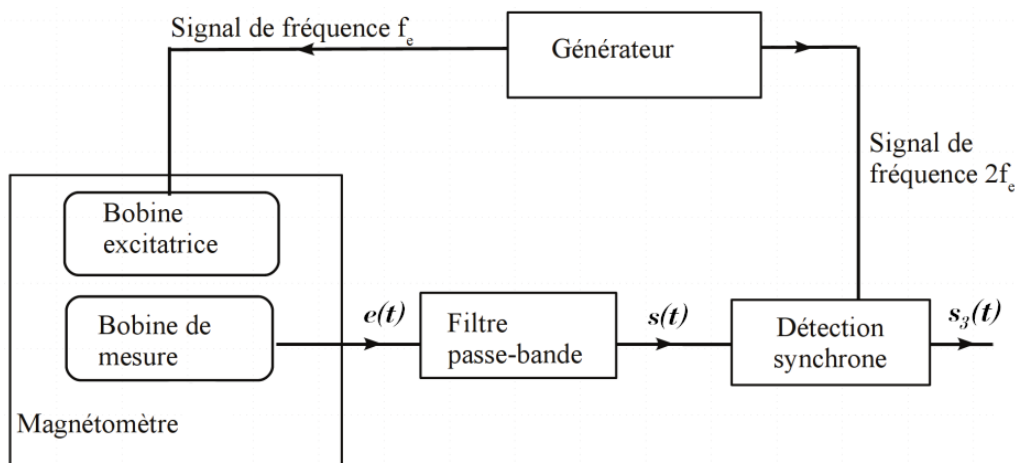


FIGURE 3 – Schéma-bloc partiel du circuit de mesure du magnétomètre.

La détection du signal  $s(t)$  en sortie du filtre passe-bande n'est pas toujours aisée. Le signal peut être de faible intensité et noyé dans du bruit. La *détection synchrone*, décrite plus bas, permet alors d'extraire le signal recherché.

### Conception d'un filtre passe-bande

On souhaite concevoir un filtre passe-bande d'ordre 2 qui puisse convenir dans le dispositif décrit précédemment. On se place en régime sinusoïdal de pulsation  $\omega$ , et on utilise les signaux complexes associés.

3. Rappeler la (ou les) forme(s) canonique(s) de la fonction de transfert d'un filtre passe-bande d'ordre 2. On nommera les paramètres qui entrent en jeu.
4. Montrer que le gain est maximal pour une valeur particulière de la pulsation  $\omega$ . Donner l'expression du gain maximal.

1. cf programme de fin d'année de Sup.

5. Qu'appelle-t-on bande passante à -3 dB du filtre ? Rappeler sans démonstration l'expression de la largeur de la bande passante  $\Delta\omega$  en fonction des paramètres canoniques utiles.
6. Montrer que pour des conditions à préciser, ce filtre peut avoir un comportement dérivateur ou au contraire intégrateur.
7. Compte tenu du contexte, c'est-à-dire de la forme que prend le signal d'entrée  $e(t)$ , proposer une valeur pour la pulsation propre.  
Quelle valeur minimale donner au facteur de qualité de façon à ce que les signaux éliminés soient d'amplitude inférieure à 10% du signal extrait ? (pour cette question on supposera  $K_1 = K_2 = K_3$ ).

On choisit un filtre actif de type Rauch, représenté en Fig. (4), utilisant un Amplificateur Linéaire Intégré (ALI) supposé idéal. Les admittances représentées par  $\underline{Y}_k$ ,  $k \in [1, 5]$  sont constituées soit par des résistances  $R$  soit par des capacités  $C$ .

8. Rappeler les caractéristiques d'un ALI idéal. Représenter l'évolution de la tension de sortie en fonction de la tension différentielle d'entrée et identifier sur le graphique les différents régimes de fonctionnement de l'ALI.
9. En appliquant la loi des nœuds en termes de potentiel au point A d'une part puis à l'entrée inverseuse d'autre part, montrer que la fonction de transfert peut s'écrire sous la forme

$$\underline{H} = \frac{-\underline{Y}_1 \cdot \underline{Y}_5}{\underline{Y}_4 \cdot \underline{Y}_5 + \underline{Y}_3 \cdot (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_4 + \underline{Y}_5)}$$

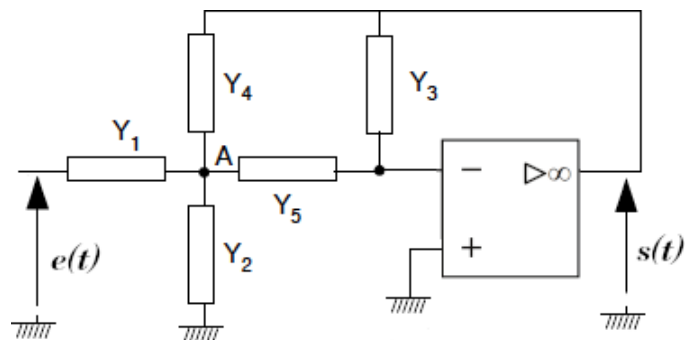


FIGURE 4 – Schéma de principe d'un filtre de type Rauch.

10. On choisit de placer une résistance en  $\underline{Y}_3$ . En déduire la nature des quatre autres admittances permettant d'obtenir un filtre passe-bande. Si plusieurs solutions sont possibles on optera pour le choix maximisant le facteur de qualité.
11. Proposer une solution possible en choisissant maintenant plutôt de placer une capacité en  $\underline{Y}_3$ .  
Dans la suite on revient à la situation précédente, où  $\underline{Y}_3$  est une résistance, ainsi que  $\underline{Y}_2$ .
12. À partir des schémas asymptotiques à très basse fréquence ou très haute fréquence, vérifier que le comportement est bien celui d'un filtre passe-bande.
13. Établir les expressions de la pulsation propre, du facteur de qualité et du gain à la résonance, en fonction des paramètres  $R$  et  $C$ . Le facteur de qualité est-il convenable compte-tenu du contexte (cf question 7.) ?
14. Construire et représenter les diagrammes de Bode en gain puis en phase, en explicitant bien la forme des asymptotes.
15. Établir l'expression des impédances d'entrée  $\underline{Z}_e$  et de sortie  $\underline{Z}_s$  de ce filtre lorsqu'il est associé à une charge  $\underline{Z}_c$  et un générateur de Thévenin en amont d'impédance de sortie  $\underline{Z}_{Th}$ . Commenter.
16. En conséquence, proposer des valeurs convenables pour  $R$  et  $C$  afin de répondre aux contraintes du problème. On prendra  $f_e = 1$  kHz.

### Détection synchrone

On décrit ici le principe de fonctionnement de la détection synchrone pour mesurer l'amplitude du signal  $s(t)$  en sortie du filtre passe-bande. Ce dernier est en fait composé d'une part du signal physique recherché  $s_p(t)$  et d'autre part de composantes présentes non associées au signal physique, que l'on appelle de façon générique *le bruit*. En notant  $b(t)$  le bruit présent, on peut écrire :

$$s(t) = s_p(t) + b(t).$$

La fréquence du signal physique utile  $s_p(t)$  est connue et égale à  $2f_e$ . On suppose que  $s_p(t)$  et  $b(t)$  ont une moyenne nulle :

$$\langle s_p(t) \rangle = \langle b(t) \rangle = 0,$$

la moyenne étant effectuée sur une durée  $T_e = \frac{1}{f_e} = \frac{2\pi}{\omega_e}$ . Un dispositif non détaillé ici permet de générer, à partir du signal alimentant la bobine excitatrice, un signal sinusoïdal de référence  $s_{\text{ref}}(t)$  de même fréquence que  $s_p(t)$ , et a priori déphasé de  $\varphi$  par rapport à celui-ci. Le bruit étant supposé aléatoire et indépendant du signal physique recherché, on a la propriété suivante :

$$\langle s_{\text{ref}}(t) b(t) \rangle = 0.$$

On pose :  $s_p(t) = A \cos(2\omega_e t + \varphi)$  et  $s_{\text{ref}}(t) = B \cos(2\omega_e t)$ . Le montage ci-dessous permet de mettre en œuvre le principe de la détection synchrone. On effectue dans un premier temps le produit du signal  $s_{\text{ref}}(t)$  avec le signal  $s(t)$ . On admet qu'en sortie du multiplieur le signal s'écrit :  $s_2(t) = K s(t) s_{\text{ref}}(t)$  où  $K$  est une constante.

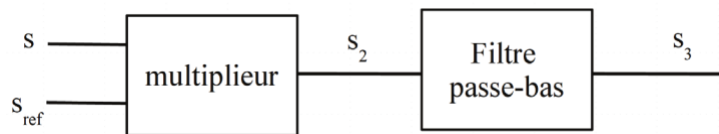


FIGURE 5 – Principe de la détection synchrone.

- 17.** Déterminer l'expression du signal de sortie  $s_2(t)$  du multiplieur en fonction de  $b(t)$ ,  $K$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $\omega_e$  et  $\varphi$ . Montrer qu'il possède une composante continue qu'on exprimera.

On souhaite réaliser le filtre passe-bas mentionné sur la Fig. (5) et permettant d'isoler la composante continue du signal  $s_2(t)$ . Pour cela, on utilise de nouveau la structure de Rauch présentée en 4, avec uniquement des résistances ou des capacités (on ne prendra pas nécessairement les mêmes valeurs numériques).

- 18.** Montrer qu'il n'y a qu'un choix possible d'affectation des admittances  $\underline{Y}_k$  pour obtenir un filtre passe-bas, et indiquer lequel.
- 19.** On réalise ce filtre avec toutes les mêmes valeurs de résistance notées  $R$ , et des capacités potentiellement différentes notées  $C_k$  pour l'admittance  $\underline{Y}_k$ . Établir la forme canonique du filtre et exprimer les paramètres canoniques en fonction de  $R$  et des  $C_k$ .
- 20.** Dans quel rapport doit-on choisir les capacités  $C_k$  pour obtenir un facteur de qualité de  $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$  ? Quel est l'intérêt d'une telle valeur ?
- 21.** On se place dans la condition précédente telle que  $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Proposer alors un choix de valeurs pour  $R$  et les capacités  $C_k$  qui conduise à une fréquence de coupure adéquate, en justifiant votre choix. On prendra de nouveau  $f_e = 1$  kHz.
- 22.** Donner l'expression du signal de sortie  $s_3(t)$  dans ces conditions.

### Mesure indirecte du champ magnétique externe

L'étude effectuée en question 2. a montré que l'amplitude de la seconde harmonique du signal de la bobine de lecture est proportionnelle à la composante  $B_0$  du champ magnétique externe dans la direction du magnétomètre. La linéarité parfaite de cette relation n'est cependant observée que si le champ à mesurer est suffisamment faible. Pour étendre la plage de fonctionnement linéaire du détecteur, on utilise une *bobine de compensation*. Cette bobine a pour but de générer un champ magnétique compensant le champ magnétique extérieur. En pratique, c'est la bobine de mesure elle-même qui est utilisée comme bobine de compensation, comme indiqué sur le schéma complet de traitement du signal en Fig. (6). La valeur du courant réalisant la compensation est déterminée via une boucle de rétroaction, qui permet en outre la détermination de l'intensité du champ magnétique extérieur.

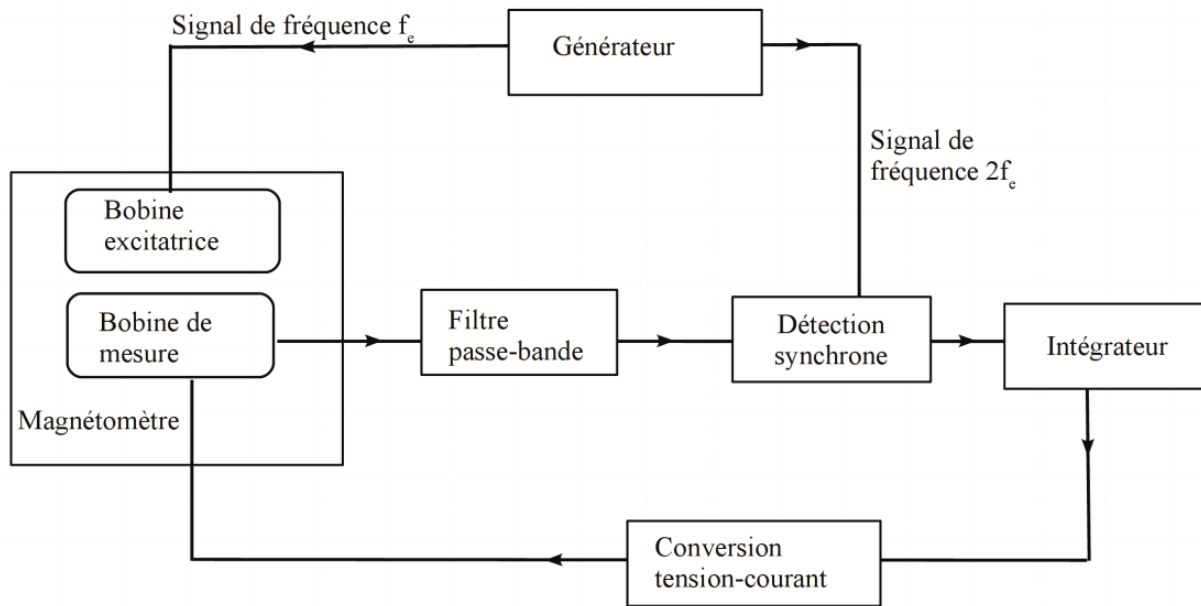


FIGURE 6 – Schéma-bloc complet du circuit de mesure du magnétomètre.

23. Proposer un montage intégrateur utilisant un ALI, une résistance et une capacité. Établir en le justifiant, son caractère intégrateur.
24. Expliquer en quoi l'utilisation d'un circuit intégrateur permet d'effectuer la compensation mentionnée ci-dessus.
25. Quelle grandeur sur la Fig. (6) permet, in fine, de déterminer la valeur du champ magnétique extérieur (constant)  $B_0$  dans lequel est plongé le magnétomètre ?

## II. Modes propres dans une fibre à saut d'indice

On considère une fibre optique à saut d'indice cylindrique, composée de deux cylindres coaxiaux de section circulaire constitués de milieux homogènes, linéaires et isotropes. L'indice de la partie centrale, appelée *cœur*, est noté  $n_1$  et celui de la partie externe, appelée *gaine*, est noté  $n_2$ ; avec  $n_2 < n_1$ . Le cœur est de diamètre  $a$ . La loi de Descartes de la réfraction permet de montrer qu'un rayon est piégé à l'intérieur du cœur, qui joue alors le rôle d'un guide d'ondes lumineuses, à la condition que son angle d'incidence  $\theta$  sur le dioptré cœur-gaine vérifie

$$\theta > \theta_\ell = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right).$$

Cette condition n'est cependant pas suffisante pour la propagation des ondes lumineuses, et ce pour une raison purement ondulatoire : lorsque l'onde progresse dans le cœur, ses réflexions successives engendrent des phénomènes d'interférences entre l'onde incidente et l'onde réfléchi. Pour cette raison, on observe que seuls certains angles d'inclinaison  $\theta_p$  ( $p \in \mathbb{N}$ ) sont susceptibles d'être effectivement guidés jusqu'à l'autre extrémité de la fibre. On parle alors de *modes propres*. Comme dans le cas d'une corde fixée à ses deux extrémités, les modes propres sont déterminés par une condition d'interférence constructive entre l'onde incidente et celle qui est engendrée dans la même direction après deux réflexions.

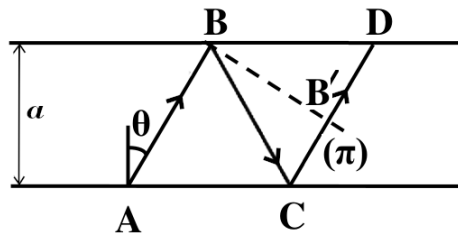


FIGURE 7 – Rayon d'incidence  $\theta$  et plan d'onde ( $\pi$ ) au sein du cœur de la fibre.

Considérons (voir Fig. (7)) une onde incidente de longueur d'onde dans le vide  $\lambda_0$ , de vecteur d'onde dirigé selon le rayon ( $AB$ ) d'incidence  $\theta$  ( $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ). Elle sera superposée à une onde de même vecteur d'onde engendrée par deux réflexions, et représentée par le rayon ( $CD$ ). Le plan d'onde ( $\pi$ ), orthogonal à ces deux rayons, correspond à une phase différente pour chacune de ces ondes, en raison des réflexions et de la distance supplémentaire  $BC + CB'$  parcourue par l'onde réfléchi.

Valeurs numériques :  $n_1 = 1,456$  et  $n_2 = 1,410$ .

1. Exprimer le déphasage  $\Delta\varphi$  entre les champs électriques de ces deux ondes (relativement à l'onde incidente) en fonction de  $\lambda_0$ ,  $a$ ,  $n_1$  et  $\cos\theta$ .
2. Quelle condition doit vérifier ce déphasage pour que l'onde résultante constitue un mode propre guidé? En déduire l'expression des valeurs  $\theta_p$  correspondantes ( $p \in \mathbb{N}$ ).
3. Montrer qu'il existe nécessairement un nombre fini  $N$  de modes propres guidés possibles. Exprimer  $N$  en fonction de  $\lambda_0$ ,  $a$ ,  $n_1$  et  $n_2$ .  
Combien y a-t-il de modes possibles pour  $a = 0,1 \text{ mm}$  et  $\lambda_0 = 1,5 \times 10^{-6} \text{ m}$ ?
4. En considérant le mode  $\theta_p$  de rang  $p$ , quelle relation doit vérifier la fréquence de l'onde lumineuse pour que ce mode existe, c'est-à-dire pour que l'onde soit transmise par la fibre? À quel type de filtre cela correspond-il? Comment pourrait-on définir sa fréquence de coupure?
5. Le mode fondamental correspond par définition, à  $p = 0$  (propagation en ligne droite). Calculer la valeur maximale que peut prendre  $a$  pour que seul ce mode se propage, dans le cas où  $\lambda_0 = 1,5 \times 10^{-6} \text{ m}$ . La fibre est alors qualifiée de *monomode*.

### III. Cuve à ondes

On considère une cuve à ondes, constituée d'une nappe d'eau dont la surface au repos est dans le plan horizontal  $Oxy$ .

#### Lame vibrante

Une lame d'axe  $Oy$ , vibrant verticalement à la fréquence  $f = 100$  Hz, produit à la surface de cette nappe d'eau une onde plane progressive harmonique transversale, d'amplitude  $a = 1,0$  mm. L'onde se propage selon l'axe  $Ox$  à la célérité constante  $c = 36$  cm.s<sup>-1</sup>. Le milieu est supposé non dispersif et non absorbant. Les variations en fonction du temps  $t$  de la hauteur d'eau au point  $S$  d'abscisse  $x_S = 0$  sont supposées sinusoïdales :

$$z(0, t) = a \cos(2\pi ft)$$

On étudie la propagation de l'onde plane selon  $Ox$ , où l'on repère la position en un point  $P$  quelconque de la surface de l'eau par son abscisse  $x$ . On pose  $\vec{u}_x$  un vecteur unitaire de l'axe  $Ox$ .

1. Exprimer la longueur d'onde  $\lambda$  et la calculer numériquement.
2. Exprimer littéralement le vecteur d'ondes  $\vec{k}$  à partir des données de l'énoncé.

Par la suite, on notera  $k$  la norme du vecteur d'ondes et  $\omega$  la pulsation.

3. Écrire, en la justifiant, l'expression de  $z(x, t)$  du point  $P$  à l'abscisse  $x$  en fonction du temps  $t$ .
4. Comparer, par rapport au mouvement de la surface de l'eau à la source (point  $S$  d'abscisse  $x = 0$ ), les mouvements des points de la surface  $M$  d'abscisse  $x_M = \frac{3\lambda}{4}$  et  $N$  d'abscisse  $x_N = 5\lambda$ .  
Représenter graphiquement, sur un même graphe, les mouvements de  $S$ ,  $M$  et  $N$  en fonction du temps.

#### Interférences

La lame vibrante est maintenant remplacée par deux pointes situées en  $S_1$  et  $S_2$ , distantes de  $a = S_1S_2$ . Celles-ci frappent simultanément la nappe d'eau, à intervalles réguliers. Ces deux pointes génèrent des ondes qui interfèrent, comme le montre la Fig. (8) (gauche) ci-dessous où la cuve à ondes est vue de dessus, éclairée par un stroboscope. La figure est claire là où la surface de l'eau est convexe et foncée là où elle est concave. L'amplitude d'oscillation est plus faible là où la figure est moins contrastée.

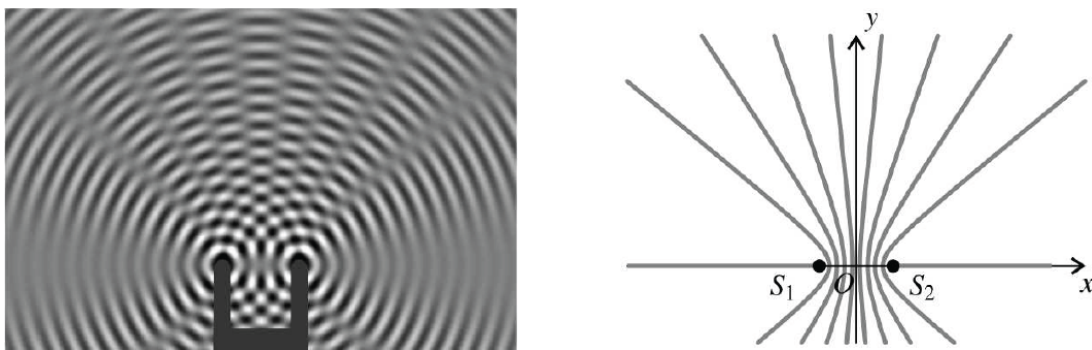


FIGURE 8 – Ondes circulaires de surface générées par deux sources ponctuelles synchrones (à gauche), et les lignes de vibration minimale qui leur sont associées (à droite).

On modélise ces ondes par des ondes sinusoïdales sphériques (ou circulaires) émises par des sources ponctuelles, situées aux points  $S_1$  et  $S_2$  où les pointes frappent la surface de l'eau.

5. En notant  $\lambda$  la longueur d'onde, donner la condition pour que l'interférence en un point  $M$  situé aux distances  $d_1$  et  $d_2$  respectivement de  $S_1$  et de  $S_2$ , soit destructive.
6. Le lieu des points vérifiant cette condition est un ensemble de courbes que l'on appelle « ligne de vibration minimale ». Ce sont des hyperboles. Elles sont représentées sur la Fig. (8) (droite).

- a) Les parties  $x < -\frac{a}{2}$  et  $x > \frac{a}{2}$  de l'axe  $Ox$  sont des lignes de vibration minimale. En déduire un renseignement sur  $a/\lambda$ .
- b) Sur le segment  $[S_1S_2]$ , quel est l'intervalle de variation de  $d_2 - d_1$ ? Déduire de la figure la valeur de  $a/\lambda$ .

\* \* \* FIN DE L'ÉPREUVE \* \* \*