

ÉLECTROCINÉTIQUE

I. Quartz et piézo-électricité (d'après ENSTIM 2004)

I.1. Modélisation électro-mécanique d'un résonateur à quartz

1. On obtient $C_P = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r \pi D^2}{4e} = 8,0 \text{ pF}$. La charge est liée à la tension par $q_1(t) = C_P v(t)$.

2. En multipliant l'équation du mouvement par γ on obtient

$$m\dot{q}_2 + h\dot{q}_2 + kq_2 = \beta\gamma v.$$

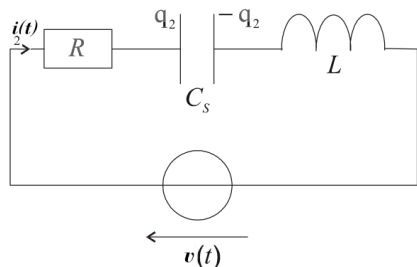
Le circuit RLC série vérifie la loi des mailles :

$$Ri_2 + \frac{q_2}{C_S} + L \frac{di_2}{dt} = v \quad \text{avec} \quad i_2 = \dot{q}_2$$

$$\text{d'où} \quad L \frac{d^2 q_2}{dt^2} + R \frac{dq_2}{dt} + \frac{q_2}{C_S} = v.$$

En comparant les deux équations (même second membre v à droite) on obtient les équivalences suivantes :

$$L = \frac{m}{\beta\gamma}, \quad R = \frac{h}{\beta\gamma} \quad \text{et} \quad C_S = \frac{\beta\gamma}{k}.$$



3. a) Les admittances deux branches en dérivation s'additionnent :

$$Z_{AB} = \left(j\omega C_P + \frac{1}{j\omega C_S + j\omega L} \right)^{-1} = \frac{1 - \omega^2 C_S L}{j\omega C_P (1 - \omega^2 C_S L) + j\omega C_S} = \frac{-j}{\omega(C_P + C_S)} \cdot \frac{1 - \omega^2 C_S L}{1 - \omega^2 \frac{C_P C_S}{C_P + C_S} L}$$

$$\text{d'où} \quad Z_{AB} = \left(-\frac{j}{\alpha\omega} \right) \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_a^2}} \quad \text{avec} \quad \alpha = C_P + C_S, \quad \omega_r = \frac{1}{\sqrt{C_S L}} \quad \text{et} \quad \omega_a = \sqrt{\frac{C_P + C_S}{C_P C_S L}}.$$

b) On obtient $f_a = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{C_P + C_S}{C_P C_S L}} = 8,00 \times 10^5 \text{ Hz}$ et $f_r = \frac{1}{2\pi \sqrt{C_S L}} = 7,96 \times 10^5 \text{ Hz}$.

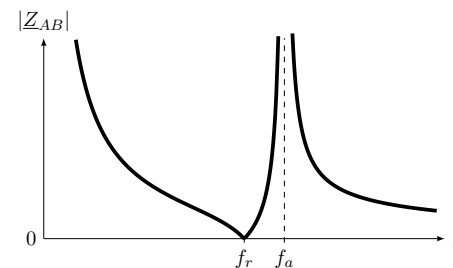
c) Étant donné que $f_r < f_a$ (et donc $\omega_r < \omega_a$), le quartz a un comportement inductif lorsque

$$\text{Im}(Z_{AB}) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad f \in]f_r, f_a[.$$

Inversement il aura un comportement capacitif lorsque $f \in [0, f_r[\cup]f_a, \infty[$.

d) On a donc $|Z_{AB}| = \frac{1}{\alpha 2\pi f} \left| \frac{1 - \frac{f^2}{f_r^2}}{1 - \frac{f^2}{f_a^2}} \right| > 0$, qui diverge en 0 et f_a , et s'annule en f_r . Entre ces valeurs une représentation graphique (sur calculatrice) permet de se convaincre que le comportement est monotone¹.

1. L'analyse du signe de la dérivée est beaucoup trop calculatoire pour avoir sa place ici.



4. a) Par la loi du pont diviseur de tension on obtient $\frac{H}{R_v + Z_{AB}} = \frac{1}{1 + Z_{AB}/R_v}$.

b) Comme Z_{AB} est un imaginaire pur, on obtient

$$|H| = \frac{1}{\sqrt{1 + |Z_{AB}|^2/R_v^2}} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad |Z_{AB}| = \sqrt{3} R_v.$$

c) On obtient $Q = \frac{f_0}{\Delta f} = 1,59 \times 10^4$ (avec $f_0 = 796 \text{ kHz}$, qui correspond à f_r), ce qui conduit à

$$R = \frac{L\omega_0}{Q} = 2\pi \Delta f L = 157 \Omega.$$

I.2. Principe d'une montre à quartz

5. a) Le compteur divise la fréquence par 2. En sortie on obtient un signal à $32768/2 = 16384 \text{ Hz}$

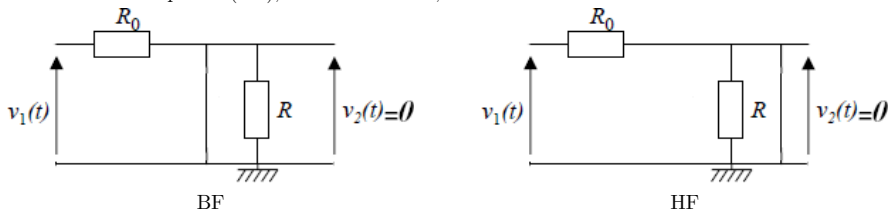
b) $32768 = 2^k \Leftrightarrow k = \frac{\ln 32768}{\ln 2} = 15$, donc $32768 = 2^{15}$. En mettant en cascade 15 compteurs modulo 2, on obtient une fréquence de 1,0000 Hz, donc on commande les secondes².

2. On garde 5 chiffres significatifs. Plus précisément la précision relative est de $\frac{1}{32768} = 3,1 \times 10^{-5}$. On peut dire que la montre retarde ou avance potentiellement de une seconde toutes les 32768 secondes, soit toutes les 9h06min.

II. Analyse du filtre d'un oscillateur quasi-sinusoidal (d'après Banque PT 2021, adaptation C. Lacpatia)

II.1. Etude fréquentielle

1. À Basse Fréquence (BF) l'inductance se comporte comme un fil et la capacité comme un interrupteur ouvert. À Haute Fréquence (HF), c'est le contraire, d'où les schémas ci-dessous.



Dans les deux cas limites la tension de sortie tend vers zéro donc il s'agit nécessairement d'un filtre passe-bande.

2. Les admittances des dipôles L, R, C en dérivation s'additionnent, et la loi du pont diviseur de tension conduit à

$$\underline{H}_F = \frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{1 + R_0(\frac{1}{R} + jC\omega + \frac{1}{jL\omega})} = \frac{1}{1 + \frac{R_0}{R} + R_0(jC\omega + \frac{1}{jL\omega})} = \frac{1}{1 + j\frac{R_0}{1+R_0/R}(C\omega - \frac{1}{L\omega})}$$

Par identification, il vient d'abord : $H_0 = \frac{1}{1 + R_0/R} = \frac{R}{R + R_0}$. Puis en multipliant les deux derniers termes au dénominateur on identifie :

$$Q_F^2 \frac{x}{x} = \frac{R_0^2}{(1 + R_0/R)^2} \frac{C}{L} \Leftrightarrow Q_F = \frac{R_0}{1 + R_0/R} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

On en déduit

$$Q_F x = \frac{R_0}{1 + R_0/R} C\omega \Leftrightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

On peut aussi ré-écrire sous forme de fraction rationnelle

$$\underline{H}_F = \frac{H_0 \frac{jx}{Q_F}}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q_F}}$$

ce qui montre qu'il s'agit d'un filtre du second ordre (ordre du polynôme au dénominateur).

3. On obtient $G(x) = \frac{H_0}{\sqrt{1 + Q_F^2(x - \frac{1}{x})^2}}$ avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ et car $H_0 > 0$.

$G(x)$ est maximal lorsque le dénominateur est minimal, soit pour $x_r = 1$, donc pour $\omega_r = \omega_0$. On a alors $G_{\max} = G(x = 1) = H_0$.

4. Les pulsations de coupure vérifient

$$\frac{H_0}{\sqrt{1 + Q_F^2(x - \frac{1}{x})^2}} = \frac{H_0}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 1 + Q_F^2(x - \frac{1}{x})^2 = 2 \Leftrightarrow (x - \frac{1}{x})^2 = \frac{1}{Q_F^2}$$

$$\Leftrightarrow (x - \frac{1}{x}) = \pm \frac{1}{Q_F} \Leftrightarrow x^2 \pm \frac{x}{Q_F} - 1 = 0$$

Les deux seules solutions positives sont

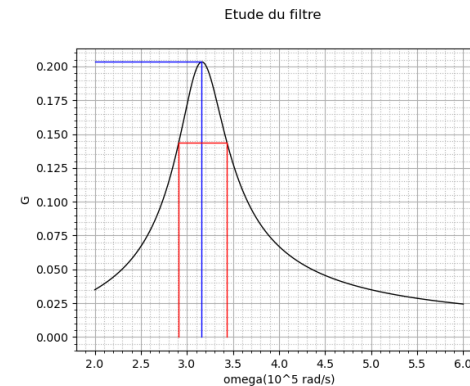
$$x_{c,1} = \frac{1}{2Q_F} (-1 + \sqrt{1 + 4Q_F^2}) \text{ et } x_{c,2} = \frac{1}{2Q_F} (1 + \sqrt{1 + 4Q_F^2})$$

$$\text{d'où } \omega_{c,1} = \frac{1}{2Q_F} (-1 + \sqrt{1 + 4Q_F^2}) \text{ et } \omega_{c,2} = \frac{1}{2Q_F} (1 + \sqrt{1 + 4Q_F^2})$$

$$\text{On en déduit } \Delta\omega = \omega_{c,2} - \omega_{c,1} = \frac{\omega_0}{Q_F}$$

- 5.

On mesure le gain maximal (bleu) $H_0 = G_{\max} = 0,205$ et la pulsation de résonance qui lui est associée : $\omega_0 = 3,15 \times 10^5 \text{ rad/s}$. Pour les fréquences de coupure, on détermine $\frac{G_{\max}}{\sqrt{2}} = 0,145$ et on repère les pulsations (rouge) associées ($\omega_{c,1} = 2,9 \times 10^5 \text{ rad/s}$ et $\omega_{c,2} = 3,4 \times 10^5 \text{ rad/s}$) soit $\Delta\omega = 5 \times 10^4 \text{ rad/s}$.



6. Le gain maximal $H_0 = G_{\max}$ permet d'obtenir R :

$$G_{\max} = \frac{1}{1 + \frac{R_0}{R}} \Leftrightarrow R = \frac{R_0}{\frac{1}{G_{\max}} - 1} = 1,2 \times 10^2 \Omega$$

On utilise ensuite la largeur de la bande passante et les expressions de Q_F et ω_0 :

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q_F} = \frac{1}{H_0 R_0 C} \Leftrightarrow C = \frac{1}{G_{\max} R_0 \Delta\omega} = 2 \times 10^{-7} \text{ F}$$

Enfin,

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Leftrightarrow L = \frac{1}{C\omega_0^2} \Leftrightarrow L = \frac{G_{\max} R_0 \Delta\omega}{\omega_0^2} = 5 \times 10^{-5} \text{ H}$$

II.2. Etude temporelle

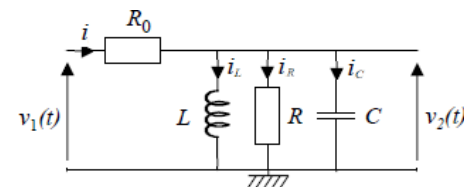
7. On a

$$\underline{H}_F = \frac{H_0 \frac{jx}{Q_F}}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q_F}} \text{ donc } \forall t, \left(\frac{(j\omega)^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{\omega_0 Q_F} + 1 \right) v_2(t) = H_0 \frac{j\omega}{\omega_0 Q_F} v_1(t)$$

$$\text{d'où } \forall t, \frac{d^2 v_2}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q_F} \frac{dv_2}{dt} + \omega_0^2 v_2 = \frac{H_0 \omega_0}{Q_F} \frac{dv_1}{dt} = \frac{1}{R_0 C} \frac{dv_1}{dt}$$

- 8.

Des trois dipôles R, L, C , seule la capacité est traversée par un courant à $t = 0+$ car $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0$ et $i_R(0^+) = \frac{v_2(0^+)}{R} = 0$. Ainsi la loi des nœuds conduit à $i(0^+) = i_C(0^+)$ et la loi des mailles donne :



$$v_1(0^+) = R_0 i_C(0^+) + v_2(0^+) \Leftrightarrow E = R_0 i_C(0^+) + 0 \Leftrightarrow i_C(0^+) = \frac{E}{R_0}.$$

9. Remarque : Les valeurs trouvées lors de l'étude fréquentielle conduisent effectivement à un régime pseudo-périodique puisque $Q_F = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \approx 6 > \frac{1}{2}$ donc le discriminant de l'équation caractéristique est positif.

La solution générale de l'équation sans second membre est :

$$v_2(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{2Q_F}{\omega_0} = \frac{2R_0C}{1 + R_0/R} \quad \text{et} \quad \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q_F^2}}.$$

Comme $v_1(t) = E = \text{constante} \forall t > 0$, le second membre est nul $\forall t > 0$ et on ne cherche donc pas de solution particulière. Les conditions initiales donnent :

$$v_2(0^+) = 0 = A \quad \text{et} \quad \frac{i_C(0^+)}{C} = \frac{E}{R_0C} = \omega B \Leftrightarrow B = \frac{E}{R_0C\omega}$$

$$\text{d'où} \quad v_2(t) = \frac{E}{R_0C\omega} e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\omega t)$$

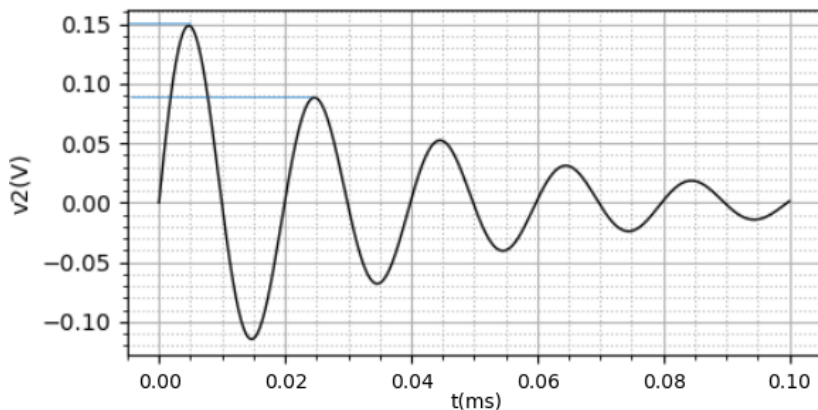
10. En l'absence de solution particulière le décrément logarithmique peut être défini par $\delta = \ln\left(\frac{v_2(t)}{v_2(t+T)}\right)$.

Pour mesurer δ on privilégie bien sûr les instants t_m où v_2 est un maximum local ou un minimum local. En utilisant $\sin(t+T) = \sin(t)$, il vient :

$$\delta = \ln\left(\frac{e^{-\frac{t}{\tau}} \left(\frac{E}{R_0C\omega} \sin(\Omega t)\right)}{e^{-\frac{(t+T)}{\tau}} \left(\frac{E}{R_0C\omega} \sin(\Omega(t+T))\right)}\right) = \frac{T}{\tau} = \frac{2\pi\omega_0}{\omega 2Q_F} \quad \text{d'où} \quad \delta = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q_F^2 - 1}}.$$

11. Remarque : le sujet a été mal relu par le prof... contrairement à ce qui est écrit dans l'énoncé le graphe du courant ne figure pas dans le sujet car n'est pas nécessaire pour trouver les paramètres demandés. Par contre l'axe des abscisses aurait du être légendé et donc c'est inexploitable...! (erreur de version de figure...).

Il y a 3 paramètres à trouver (L , C et E) donc il faut mesurer 3 grandeurs distinctes sur le graphe. Les mesures de la pseudo-période T et de δ permettent en principe de remonter aux paramètres canoniques ω_0 et Q et donc de trouver L et C connaissant R .



On mesure ci-dessus

$$5T \approx 0,100 \text{ ms} \quad \text{d'où} \quad T = 0,020 \text{ ms},$$

et à l'aide des 2 premiers maxima on obtient

$$\delta = \frac{0,15}{0,09} = 0,51.$$

Remarque : Le 2ème chiffre significatif de δ est fluctuant selon le choix des valeurs sur la courbe.

On en déduit

$$\tau = \frac{T}{\delta} \quad \text{or} \quad \tau = \frac{2R_0C}{1 + R_0/R} \quad \text{donc} \quad C = \frac{T}{2\delta} \left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R}\right) = 2,0 \times 10^{-7} \text{ F}.$$

Puis, comme on observe plus de 5 oscillations nettes on peut simplement écrire

$$\delta \approx \frac{\pi}{Q_F} \quad \text{or} \quad Q_F = \frac{R_0}{1 + R_0/R} \sqrt{\frac{C}{L}} \quad \text{d'où} \quad L = \frac{C \delta^2}{\left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R}\right)^2 \pi^2} = \frac{T \delta}{2\pi^2 \left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R}\right)} = 4,9 \times 10^{-5} \text{ H}.$$

Remarque : On retrouve bien les valeurs obtenues par étude fréquentielle précédemment. Toutefois le second chiffres significatif ici n'est pas tout à fait certain.

Pour trouver E il faut exploiter un point particulier de la courbe qui ne soit pas un zéro, sachant que

$$v_2(t) = \frac{E}{R_0C\omega} e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\omega t).$$

On peut exploiter le premier point où $\sin(\omega t) = 1$, c'est-à-dire en $t = \frac{T}{4} \approx 0,050 \text{ ms}$. À la précision disponible sur le graphe la valeur de v_2 en ce point ne se distingue pas du maximum, donc $v_2(t = \frac{T}{4}) \approx 0,15 \text{ V}$. D'où, en notant que $\frac{T}{4\tau} = \frac{\delta}{4}$ et $\omega = \frac{2\pi}{T}$, on obtient

$$E = 2\pi e^{\frac{\delta}{4}} \frac{R_0C}{T} v_2(t = \frac{T}{4}) = 5,2 \text{ V}.$$