ÉLECTROCINÉTIQUE

Soignez la présentation et la rédaction, qui doit être complète et concise. Tout résultat doit être justifié, et mis en valeur. Les résultats doivent d'abord être écrits sous forme littérale et doivent être homogènes. Les résultats numériques doivent avoir un nombre de chiffres significatifs vraisemblable. Les schémas doivent être clairs, suffisamment grands et lisibles. Si vous n'arrivez pas à montrer un résultat, admettez-le clairement et poursuivez.

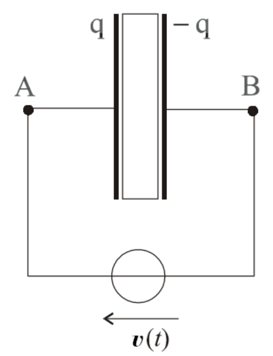
CALCULATRICES AUTORISÉES

I. Quartz et piézo-électricité

Le quartz est une forme particulière de cristal de silice. Il présente des propriétés physiques très intéressantes : la piézo-électricité. Quand on comprime un morceau de quartz dans une direction particulière, une tension apparaît aux bornes du cristal (c'est l'*effet piézo-électrique*). Réciproquement, quand on applique une tension aux bornes d'un quartz, ce dernier se déforme proportionnellement à la tension appliquée (c'est l'*effet piézo-électrique inverse*). Ainsi, le quartz est très intéressant pour l'électronique car on parvient à réaliser des circuits oscillants, à base de résonateur à quartz, très stables dans le temps. Actuellement, le quartz est remplacé par certaines céramiques piézo-électriques.

I.1. Modélisation électro-mécanique d'un résonateur à quartz

Un cristal de quartz est taillé sous forme de pastille cylindrique mince. La base circulaire présente un diamètre $d = 1\,\mathrm{cm}$ et l'épaisseur de la pastille est $e = 0,2\,\mathrm{mm}$. Des électrodes métalliques (en or généralement) sont déposées sur chacune des faces circulaires du quartz (on suppose que ces faces sont totalement métallisées, cf figure ci-contre). On parle d'*électrodes de connexion*. On a ainsi réalisé un condensateur plan.
Aucune connaissance en mécanique n'est nécessaire pour ce problème et les équations mécaniques sont fournies.



D'un point de vue électrique, la charge totale q apparaissant sur les électrodes planes a deux origines :

- les deux faces planes du disque forment un condensateur de capacité C_P, d'où une charge $q_1(t)$;
- lors d'une élongation $x(t)$ du cristal (ou une contraction, x est algébrique), l'effet piézo-électrique provoque l'apparition d'une charge q_2 proportionnelle à x : $q_2(t) = \gamma\, x(t)$.

1. On rappelle que la capacité d'un condensateur plan vaut $C_P = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{e}$ où S est l'aire d'une électrode, e l'épaisseur du condensateur, $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}\,\mathrm{F.m^{-1}}$ la permittivité du vide, et $\varepsilon_r = 2,3$ la permittivité relative du quartz.
Estimer alors la capacité C_P appelée *capacité de connexion.*
Quelle est la relation entre la charge q_1, la capacité C_P et la tension $v(t)$?

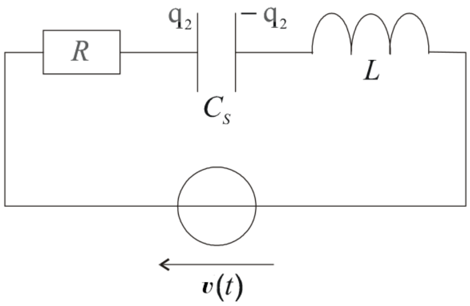
D'un point de vue mécanique, lorsque l'on soumet le disque piézo-électrique à une tension sinusoïdale $v(t) = V\cos(\omega t)$, il va être, dans le cadre d'une approximation linéaire, le siège d'une vibration mécanique sinusoïdale sous l'effet d'une force extérieure proportionnelle à cette tension. On modélise ce comportement par un système de masse effective m évoluant selon un axe Ox, s'écartant de sa position d'équilibre d'une distance x algébrique (l'allongement du cristal) et subissant plusieurs forces :

- la force due à l'effet piézo-électrique $\beta v(t)$,
- une force de rappel type élastique $-kx(t)$ $(k > 0)$ qui a pour origine la rigidité du matériau,
- des frottements supposés proportionnels à la vitesse et de la forme $-h\dot{x}(t)$ $(h > 0)$.

En comparaison avec ces forces le poids est supposé négligeable. L'application du principe fondamental de la dynamique à ce système conduit alors à l'équation différentielle suivante :

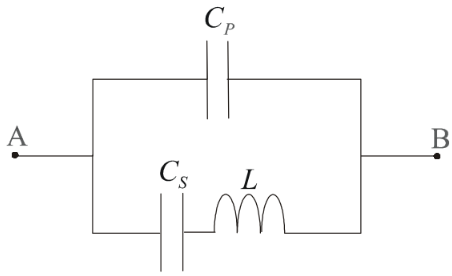
$$m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = \beta v$$

2. En déduire l'équation différentielle vérifiée par la charge q_2.
Puis montrer par analogie que l'on peut considérer q_2 comme la charge d'un condensateur de capacité C_S inséré dans un circuit type RLC série représenté ci-contre. Comment s'exprimeraient alors les grandeurs *équivalentes* R, L et C_S en fonction des paramètres m, h, k, β et γ ?



3. Impédance équivalente du quartz

Dans cette question, **on néglige la résistance** R du quartz. Le schéma électrique simplifié est alors représenté ci-contre. Pour les applications numériques, on prendra $L = 500\,\text{mH}$, $C_S = 0,0800\,\text{pF}$ et $C_P = 8,00\,\text{pF}$.
On se placera toujours en Régime Sinusoïdal Forcé (RSF) de pulsation ω.



a) Calculer alors l'impédance complexe du quartz, vue entre les bornes A et B. On l'écrira sous la forme

$$\underline{Z}_{AB} = \left(-\frac{j}{\alpha\omega}\right)\frac{1-\frac{\omega^2}{\omega_r^2}}{1-\frac{\omega^2}{\omega_a^2}}$$

où j est le nombre imaginaire pur tel que $j^2 = -1$, et on donnera les expressions de α, ω_a et ω_r en fonction de L, C_P et C_S.

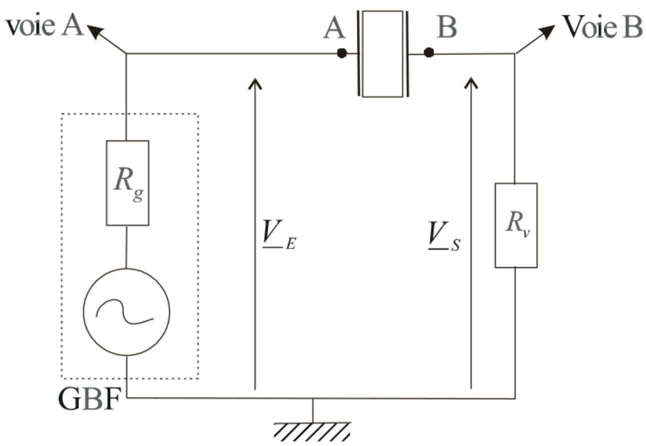
b) Donner les valeurs numériques des fréquences f_a et f_r respectivement aux pulsations ω_a et ω_r.

c) Etudier le comportement inductif ou capacitif du quartz en fonction de la fréquence.

d) Tracer l'allure de $|\underline{Z}_{AB}|$, module de l'impédance complexe du quartz, en fonction de la fréquence.

4. Etude expérimentale de la résonance d'un quartz en RSF

On veut tracer expérimentalement la courbe donnant l'impédance du quartz en fonction de la fréquence d'excitation. On dispose d'un Générateur Basses Fréquences (GBF) pouvant délivrer une tension sinusoïdale d'amplitude réglable. Le GBF possède une résistance interne R_g. On dispose d'une résistance R_v *variable*, d'un quartz et d'un oscilloscope. On réalise alors le montage de la figure ci-contre, où les tensions sinusoïdales $v_E(t)$ et $v_S(t)$ sont représentées par leur amplitude complexe $\underline{V}_E$ et $\underline{V}_S$.



*Dans cette question, on néglige toujours la résistance du quartz sauf dans la dernière sous-question **4.c)**.*

a) Calculer le rapport de la tension de sortie $\underline{V}_S$ à celle d'entrée $\underline{V}_E$, noté $\underline{H} = \frac{\underline{V}_S}{\underline{V}_E}$ en fonction de R_v et de $\underline{Z}_{AB}$.

b) On fait alors varier la fréquence, et pour chaque fréquence on ajuste la résistance R_v de telle façon que $|\underline{H}| = \frac{1}{2}$. Que vaut alors le module de l'impédance du quartz en fonction de R_v ?

c) Autour du pic de résonance d'intensité situé vers 796 kHz, on mesure une largeur de bande passante de 50 Hz. On défini le *facteur de qualité Q du quartz* comme une mesure de l'acuité de cette résonance, comme dans le cas de la résonance d'un filtre passe-bande. Quelle est la valeur numérique de Q ? Commenter cette valeur.
En supposant que le facteur de qualité soit donné par la relation $Q = \frac{L\omega_0}{R}$ (ω_0 étant la pulsation de résonance), estimer la valeur de la résistance R du quartz.

I.2. Principe d'une montre à quartz

Une horloge est composée d'un oscillateur plus ou moins stable dans le temps et d'un système de comptage des oscillations. Le quartz utilisé présente une fréquence de résonance de 32768 Hz. Cela signifie que 32768 fois par seconde une impulsion électrique est émise par le circuit oscillant. Un dispositif électrique doit compter les impulsions. Ces compteurs fonctionnent dans la technologie binaire (suite de 0 et de 1). Une impulsion électrique correspond à la valeur 1. La valeur 0 correspond à aucun signal électrique.

5. **a) Compteur modulo 2**
Un tel compteur délivre une impulsion de sortie dès qu'il a compté 2 impulsions à son entrée. Si en entrée d'un tel compteur on envoie le signal à 32768 Hz délivré par le circuit à quartz, quelle est la fréquence du signal de sortie du compteur modulo 2 ?

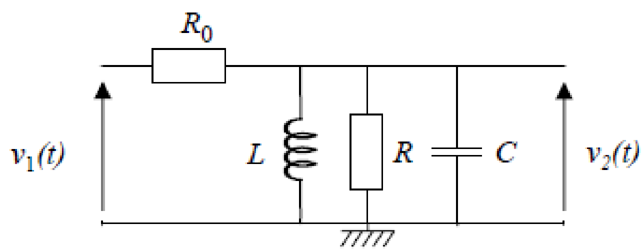
b) Succession de compteurs modulo 2
Ecrire le nombre 32768 sous la forme 2^k où k est un entier naturel.
Combien de compteurs modulo 2 faut-il alors mettre en cascade pour commander le chiffre des secondes ?

II. Analyse du filtre d'un oscillateur quasi-sinusoïdal

Un oscillateur quasi-sinusoïdal est conçu par association en boucle fermée d'un filtre et d'un amplificateur. On se propose ici d'étudier certaines caractéristiques du filtre.

II.1. Etude fréquentielle

Sur la figure ci-contre, on donne le schéma d'un filtre. On note $\underline{H}_F(\omega) = \frac{\underline{v_2}}{\underline{v_1}}$ sa fonction de transfert où $\underline{v_1}$ et $\underline{v_2}$ sont respectivement les représentations complexes des tensions sinusoïdales v_1 et v_2 de pulsation ω.



1. En étudiant les comportements asymptotiques à basse et haute fréquence, donner la nature de ce filtre.

2. Déterminer l'expression de $\underline{H}_F(\omega)$ et la mettre sous la forme

$$\underline{H}_F(\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ_F\left(x - \frac{1}{x}\right)} \tag{1}$$

avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, ω_0 étant la pulsation propre du filtre. Expliciter littéralement Q_F, H_0 et ω_0 puis la fréquence propre associée f_0. *On utilisera cette forme canonique (grandeurs littérales Q_F, H_0 et ω_0) dans les réponses aux questions suivantes.*
Quel est l'ordre de ce filtre ?

3. Donner l'expression du gain $G(\omega) = |\underline{H}_F(\omega)|$.
Justifier l'existence d'une pulsation de résonance qu'on déterminera. Que vaut le gain maximal qu'on notera $G_{\max}$?

4. Déterminer les pulsations de coupure $\omega_{c,1}$ et $\omega_{c,2}$ (on prendra $\omega_{c,1} < \omega_{c,2}$). En déduire la relation reliant la largeur de la bande passante $\Delta\omega$ au facteur de qualité Q_F et à la pulsation propre ω_0.

On réalise une étude expérimentale du filtre en mesurant le gain $G(\omega)$ pour différentes fréquences avec $R_0 = 470\Omega$, conduisant au graphe de la Fig. 1) représenté en Annexe.

5. Mesurer, en expliquant soigneusement la démarche les grandeurs $G_{\max}, \Delta\omega$ et ω_0. On fera apparaître clairement les tracés réalisés sur le graphique en annexe **à rendre avec la copie** pour obtenir ces grandeurs.

6. En déduire les valeurs numériques de R, L et C. On exprimera d'abord littéralement ces grandeurs en fonction de $G_{\max}, \Delta\omega, \omega_0$ et R_0 avant de faire les applications numériques.

II.2. Etude temporelle

7. A partir de la fonction de transfert $\underline{H}_F(\omega)$, établir l'équation différentielle qui relie $v_2(t)$ à $v_1(t)$.

Pour étudier temporellement le filtre, on soumet l'ensemble à un échelon de tension ($v_1(t)$ passant de 0 à E à $t = 0$). A $t = 0$ le condensateur est déchargé et l'intensité circulant dans la bobine est nulle.

8. Déterminer en le justifiant $i_C(t = 0^+)$, l'intensité circulant dans le condensateur à $t = 0^+$. On orientera i_C en convention croisée (« récépteur ») par rapport à $v_2(t)$.

9. En déduire l'expression complète de $v_2(t)$ pour $t \geq 0$ en supposant le régime pseudo-périodique.

10. Définir le décrément logarithmique δ associé à la tension $v_2(t)$. Puis établir une relation entre δ et Q_F.

On prend $R = 120\,\Omega$ et $R_0 = 470\,\Omega$. Le tracé temporel de $v_2(t)$ est donné en Fig. 2 en Annexe.

11. Déterminer à partir de ce tracé les valeurs numériques de C, L et E. *On précisera avec soin les méthodes utilisées.* Les mesures obtenues graphiquement pourront apparaître sur le graphique en Annexe.

* * * Fin de l'épreuve * * *
(pensez à rendre votre annexe avec votre NOM et Prénom)

ANNEXE - NOM Prénom :

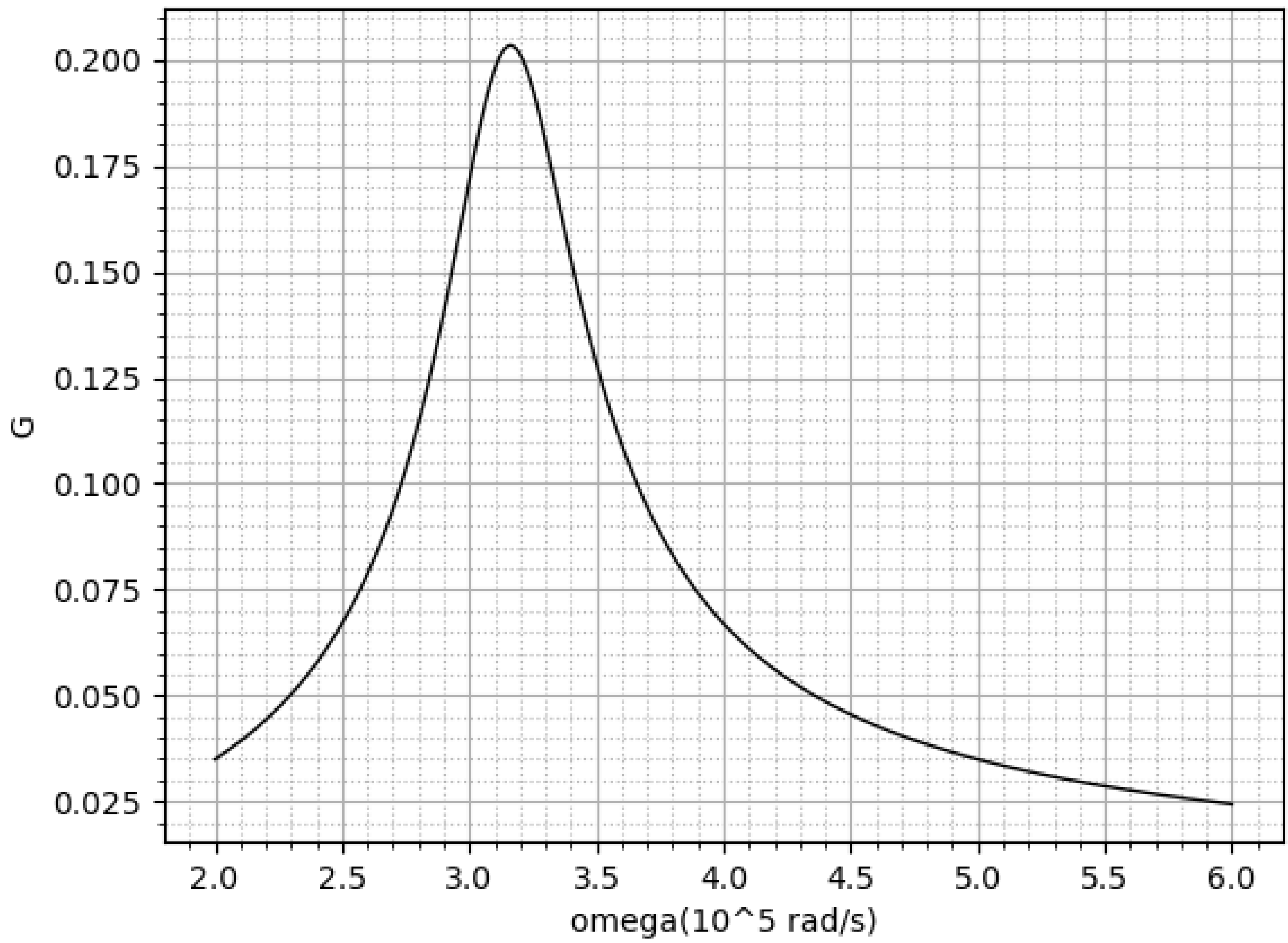


FIGURE 1 – Etude fréquentielle du filtre : Gain en fonction de la pulsation ω

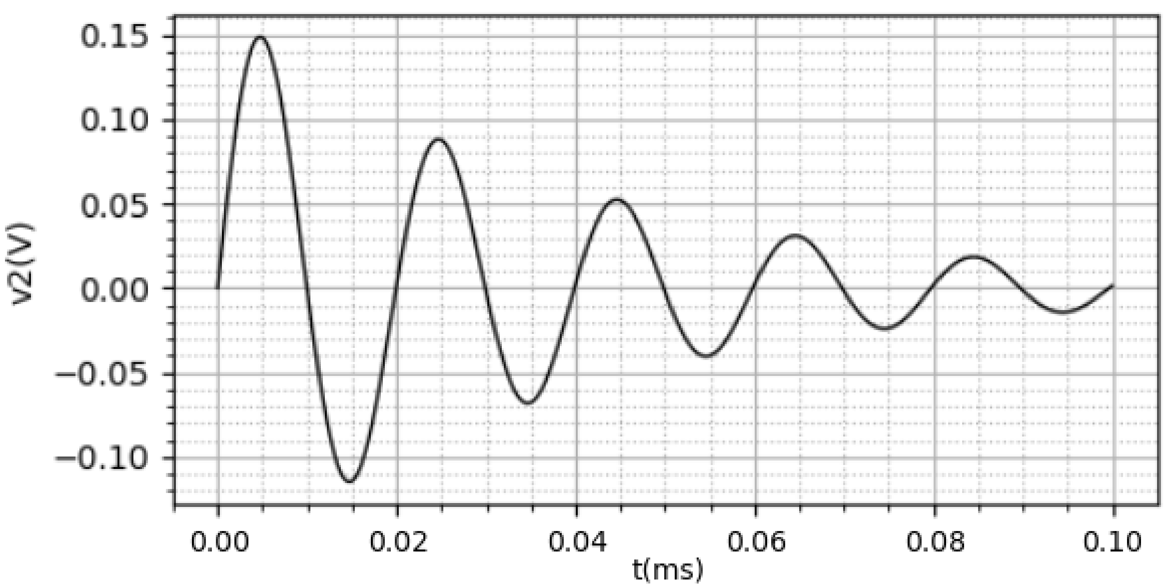


FIGURE 2 – Etude temporelle du filtre : réponse de la tension $v_2(t)$ à un échelon en entrée.