

ÉLECTROCINÉTIQUE

I. Photodiode

I.1. Caractéristique

1. L'intensité se mesure en **ampères** (A unité fondamentale) et la puissance en **watts** (1 W = 1 kg.m².s⁻³).
Donc k est en ampère par watt : $\underline{A.W^{-1}}$, ou en $\underline{V^{-1}}$ (car $\mathcal{P} = ui$ en électricité).

2. En circuit ouvert le courant est nul donc

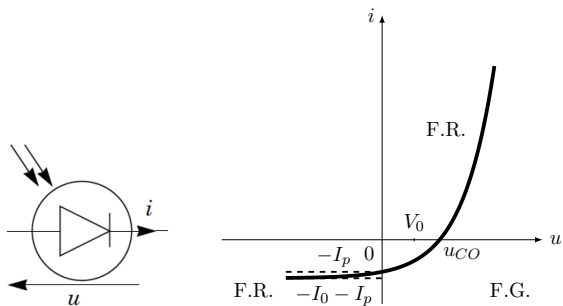
$$0 = I_0 (e^{u_{CO}/V_0} - 1) - I_p \Leftrightarrow u_{CO} = V_0 \ln \left(1 + \frac{I_p}{I_0} \right).$$

3. L'intensité de court-circuit est obtenue en court-circuitant les bornes de la diode (reliées par un fil et donc soumises à une ddp u nulle) :

$$i_{CC} = -I_p.$$

4. La caractéristique de la diode en convention croisée (récepteur) a l'allure ci-dessous. La valeur asymptotique pour $u \rightarrow -\infty$ est $-I_0 - I_p$.

Dans le schéma ci-dessous, on sous-estime d'un facteur 10 la différence importante d'ordre de grandeur entre I_0 et I_p ($I_p \gg I_0$). En réalité la caractéristique a une allure beaucoup plus rectiligne.



5. Son fonctionnement est générateur (F.G.) lorsque la puissance reçue $\mathcal{P}_r = ui$ est négative, comme indiqué ci-dessus (2ème quadrant). Dans le cas contraire le fonctionnement est récepteur (F.R.).

6. On obtient $i_{CC} = -0,50 \text{ mA}$ et $u_{CO} = 0,10 \text{ V}$.

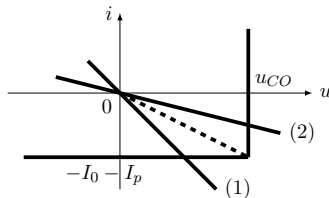
I.2. Utilisation en cellule photovoltaïque

7. a) La résistance vérifie $u = -R_c i \Leftrightarrow i = -\frac{u}{R_c}$, et le point de fonctionnement est l'intersection des deux caractéristiques (cf figure ci-contre).

On pose $R_0 = \frac{u_{CO}}{I_0 + I_p}$. Deux états sont possibles

pour la diode selon la valeur de R_c :

- situation (1) : $R_c < R_0$ alors $i = -I_0 - I_p$ et $u = R_c(I_0 + I_p)$;
- situation (2) : $R_c \geq R_0$ alors $u = u_{CO}$ et $i = -\frac{u_{CO}}{R_c}$.



b) La puissance cédée (fournie) par la photodiode, $\mathcal{P} = -ui$, est aussi la puissance reçue par le résistor :

$$\text{si } R_c < R_0 \text{ alors } \mathcal{P} = R_c(I_0 + I_p)^2; \quad \text{si } R_c \geq R_0 \text{ alors } \mathcal{P} = \frac{u_{CO}^2}{R_c}.$$

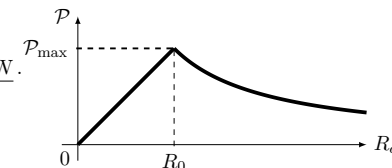
c) On obtient l'allure ci-contre.

d) Le maximum est

$$\mathcal{P}_{\max} = R_0(I_0 + I_p)^2 = u_{CO}(I_0 + I_p) = 5,2 \times 10^{-5} \text{ W}.$$

Elle est donc obtenue pour

$$R_{\text{opt}} = R_0 = \frac{u_{CO}}{I_0 + I_p} = 0,20 \text{ k}\Omega.$$



8. a) En reprenant l'expression trouvée en 2., on obtient

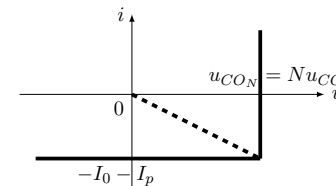
$$\mathcal{P}_{\max} = V_0 \ln \left(1 + \frac{I_p}{I_0} \right) (I_0 + I_p) \quad \text{avec } I_p = k\mathcal{P}_\ell = xI_0 \quad \text{donc } \eta = V_0 k \ln(1+x) \left(\frac{1}{x} + 1 \right) = 5,2\%.$$

b) On obtient $\left[\eta \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty \right]$, ce qui n'est pas correct car **on ne peut pas récupérer plus de puissance électrique qu'on ne reçoit de puissance lumineuse**, vu qu'il n'y a pas d'autre source d'énergie dans le circuit. En réalité le **photocourant doit nécessairement saturer pour des intensités lumineuses** trop fortes, car le nombre de porteurs de charges mobilisable n'est pas infini. C'est donc la relation $I_p = k\mathcal{P}_\ell$ qui serait en défaut.

c) Le fait d'approximer la portion courbe de la caractéristique par un angle droit conduit à sur-estimer le produit $-ui$, c'est-à-dire la puissance cédée par la photodiode. Donc on surestime η .

9.

a) Les tensions des photodiodes en série s'additionnent mais le courant est le même. Cela conduit à additionner graphiquement les caractéristiques horizontalement (pour un i donné on somme N fois les tensions u). Cela conduit donc à une tension à vide $u_{CO_N} = Nu_{CO}$ et un courant de court-circuit inchangé $i_{CC} = -I_p$.

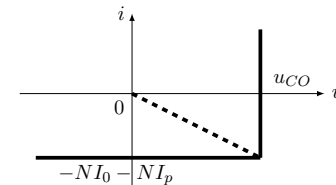


b) La puissance maximale est à nouveau obtenue en prenant le point anguleux de la caractéristique, $\mathcal{P}_{N \max} = Nu_{CO}(I_0 + I_p) = N \mathcal{P}_{\max}$, qui sera obtenue en prenant la résistance de charge optimale

$$R_{N \text{ opt}} = \frac{Nu_{CO}}{I_0 + I_p} = N R_{\text{opt}} = N R_0.$$

10.

a) Le courant des photodiodes en dérivation s'additionnent mais la tension est la même. Cela conduit à additionner graphiquement les caractéristiques verticalement (pour un u donné on somme N fois les courants i). Cela conduit donc à une tension à vide $u_{CO_N} = u_{CO}$ inchangée et un courant de court-circuit $i_{CC} = -NI_p$ (et une asymptote horizontale $-NI_0 - NI_p$).



b) La puissance maximale est à nouveau obtenue en prenant le point anguleux de la caractéristique,

$$\mathcal{P}_{N|| \max} = u_{CO}(NI_0 + NI_p) = N \mathcal{P}_{\max}, \quad \text{obtenue en prenant } R_{N|| \text{ opt}} = \frac{u_{CO}}{N(I_0 + I_p)} = \frac{R_{\text{opt}}}{N} = \frac{R_0}{N}.$$

11. D'après les résultats précédents, on obtiendra la même puissance maximale $\mathcal{P}_{N \max} = N \mathcal{P}_{\max}$

- soit en associant N photodiodes en série, avec $R_c = NR_0$;
- soit en associant N photodiodes en dérivation, avec $R_c = \frac{R_0}{N}$.

Puisqu'ici $R_c > R_0$, on opte pour l'association en série de $N = \frac{R_c}{R_0} = 5$ photodiodes.

Le rendement de conversion est alors $\eta = \frac{N \mathcal{P}_{\max}}{\mathcal{P}_\ell} = 0,26$.

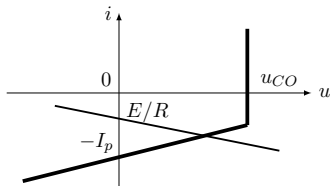
1.3. Utilisation en détecteur

Réponse statique

12. La loi des nœuds implique d'additionner les courants des 2 branches :

$$i = -I_p + \frac{u}{R_d}$$

Graphiquement cela conduit à l'addition verticale des caractéristiques de la source de courant et de la résistance (cf ci-contre, trait épais).



13. a) La photodiode est associée à un générateur de Thévenin de caractéristique $i = \frac{E}{R} - \frac{u}{R}$ (droite en trait fin ci-dessus). L'intersection des deux caractéristiques donne le point de fonctionnement. Elle correspond au système

$$\begin{cases} i = -I_p + \frac{u}{R_d} \\ i = \frac{E}{R} - \frac{u}{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} i = \frac{-I_p + E/R_d}{1 + R/R_d} \\ u = \frac{E + RI_p}{1 + R/R_d} \end{cases}$$

b) D'après le résultat précédent, la tension

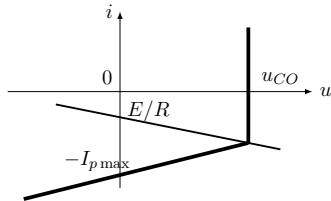
$$v_s = Ri = R \frac{-I_p + E/R_d}{1 + R/R_d}$$

dépend de façon affine de \mathcal{P}_ℓ puisque $I_p = k\mathcal{P}_\ell$. Les variations sont donc proportionnelles :

$$-\Delta v_s = \frac{Rk}{1 + R/R_d} \Delta \mathcal{P}_\ell \Rightarrow \alpha = \frac{Rk}{1 + R/R_d} = 5,0 \times 10^3 \text{ V.W}^{-1}$$

14.

On observe sur le graphe ci-dessus que si l'intensité lumineuse augmente, alors I_p augmente, donc u augmente (le point de fonctionnement se déplace vers la droite). Si l'on atteint $u = u_{CO}$ alors $v_s = E - u_{CO}$ ne variera plus en fonction de \mathcal{P}_ℓ : le détecteur sature. On se place donc à la limite, comme indiqué ci-contre.



On ne peut donc mesurer une intensité supérieure à $\mathcal{P}_{\ell \max}$ telle que les équations précédentes soient vérifiées, avec $u = u_{CO}$:

$$u_{CO} = \frac{E + RI_{p \max}}{1 + R/R_d} \text{ avec } I_{p \max} = k\mathcal{P}_{\ell \max} \Leftrightarrow \mathcal{P}_{\ell \max} = \frac{u_{CO}(1 + R/R_d) - E}{kR}$$

$$\text{d'où } \mathcal{P}_{\ell \max} = \frac{u_{CO}}{\alpha} - \frac{E}{kR} = 3,0 \text{ mW}$$

15. On repart de l'expression trouvée en 13.b) :

$$v_s = R \frac{-I_p + E/R_d}{1 + R/R_d} < 0 \Rightarrow |v_s|_{\min} = R \frac{I_{p \min} - E/R_d}{1 + R/R_d} = \alpha \left(\mathcal{P}_{\ell \min} - \frac{E}{kR_d} \right)$$

$$\text{d'où } \mathcal{P}_{\ell \min} = \frac{|v_s|_{\min}}{\alpha} + \frac{E}{kR_d} = 1,0 \mu\text{W}$$

Réponse à une impulsion lumineuse

16. À tout instant on a $v_s = E - u$, donc v_s varie continûment car u est aux bornes d'un condensateur.

17. L'état stationnaire correspond le point de fonctionnement qui a été calculé en 13., mais avec $I_p = 0$ dans l'obscurité. On obtient donc

$$v_{S0} = E - u = E - \frac{E + RI_p}{1 + R/R_d} = \frac{RE}{R + R_d} \Leftrightarrow v_{S0} = \frac{E}{1 + R_d/R}$$

Remarque : ce résultat peut être retrouvé en représentant le circuit équivalent en régime stationnaire (capacité remplacée par un interrupteur ouvert). Il s'agit d'un simple pont diviseur de tension.

18. De nouveau, en présence de lumière mais en régime stationnaire, on utilise le résultat de 13., avec $I_p = kP_0$:

$$v_{S\infty} = E - u = E - \frac{E + RI_p}{1 + R/R_d} \Rightarrow v_{S\infty} = \frac{E - R_d k P_0}{1 + R_d/R} = v_{S0} - \alpha P_0 \text{ avec } \alpha = \frac{kR}{1 + R/R_d} = \frac{kR_d}{1 + R_d/R}$$

19. a) La loi des nœuds en A s'écrit :

$$i_d = I_p + i - C_d \frac{du}{dt}$$

b) En injectant dans la relation précédente que $u = R_d i_d$ et $v_s = Ri$, on obtient

$$u = R_d I_p + \frac{R_d}{R} v_s - C_d R_d \frac{dv_s}{dt}$$

Puis on injecte la loi des mailles $u = E - v_s$ et $I_p = k\mathcal{P}_\ell$, ce qui donne

$$E - v_s = R_d k \mathcal{P}_\ell + \frac{R_d}{R} v_s + C_d R_d \frac{dv_s}{dt} \Leftrightarrow \tau \frac{dv_s}{dt} + v_s = \frac{E - R_d k \mathcal{P}_\ell}{1 + R_d/R} \text{ avec } \tau = \frac{R_d C_d}{1 + R_d/R}$$

20.

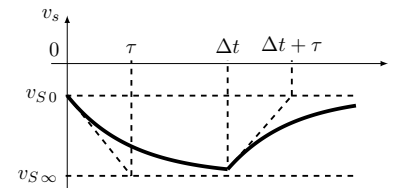
$$t \in [0, \Delta t], \tau \frac{dv_s}{dt} + v_s = \frac{E - R_d k P_0}{1 + R_d/R} = v_{S\infty} = \text{constante} \Rightarrow v_s(t) = v_{S\infty} + \lambda e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

car le second membre est constant. À l'instant initial et par continuité de v_s on a

$$v_s(0) = v_{S0} = v_{S\infty} + \lambda \text{ donc } v_s(t) = v_{S\infty} + (v_{S0} - v_{S\infty}) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

L'allure du graphe est représentée ci-dessous ($E < 0$ donc $v_{S0} < 0$ et $v_{S\infty} < 0$).

Remarque : l'écriture de la solution sous la forme ci-dessus est toujours valable pour une équation du 1er ordre avec second membre constant.



21.

$$\forall t > \Delta t : \tau \frac{dv_s}{dt} + v_s = \frac{E}{1 + R_d/R} = v_{S0} = \text{constante}$$

On raccorde la nouvelle solution pour $t > \Delta t$ par continuité avec celle pour $t \in [0, \Delta t]$:

$$\forall t > \Delta t : \boxed{v_s(t) = v_{S0} + (v_s(\Delta t) - v_{S0}) e^{-\frac{t-\Delta t}{\tau}}} \quad \text{avec} \quad \boxed{v_s(\Delta t) = v_{S\infty} + (v_{S0} - v_{S\infty}) e^{-\frac{\Delta t}{\tau}}}.$$

L'allure de cette solution est ajoutée sur le graphe précédent.

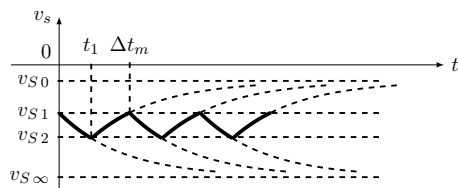
22. Remarque : dans l'énoncé les mots « dépasse » et « sous la valeur » doivent s'entendre en valeur absolue puisque toutes ces tensions sont en fait négatives.

D'autre part il y a une erreur dans l'énoncé pour le second seuil (sans conséquences). Les expressions données devaient normalement correspondre respectivement à des seuils de moitié et quart de l'excursion totale de la solution :

- $\frac{v_{S0}}{2} + \frac{v_{S\infty}}{2} = v_{S0} + \frac{1}{2}(v_{S\infty} - v_{S0})$
- $\frac{3v_{S0}}{4} + \frac{v_{S\infty}}{4} = v_{S0} + \frac{1}{4}(v_{S\infty} - v_{S0})$;

Nous poursuivons avec les seuils indiqués dans l'énoncé.

Pour simplifier les calculs on note les deux seuils $v_{S1} = \frac{v_{S0}}{2} + \frac{v_{S\infty}}{4}$ et $v_{S2} = \frac{v_{S0}}{2} - \frac{v_{S\infty}}{4}$. On considère la situation optimale où chaque impulsion lumineuse commence au moment où $v_s = v_{S1}$ et termine au moment où $v_s = v_{S2}$. Le signal v_s qui découle d'une succession de plusieurs impulsions est représenté ci-dessous, en prenant le début de la n -ième impulsion en $t = 0$.



- La n -ième impulsion commence à $t = 0$ et se termine à l'instant t_1 tel que

$$v_{S2} = v_{S\infty} + (v_{S1} - v_{S\infty}) e^{-\frac{t_1}{\tau}} \Leftrightarrow t_1 = \tau \ln \left(\frac{v_{S1} - v_{S\infty}}{v_{S2} - v_{S\infty}} \right).$$

- La $n + 1$ -ième impulsion commence à l'instant Δt_m qui vérifie :

$$v_{S1} = v_{S0} + (v_{S2} - v_{S0}) e^{-\frac{\Delta t_m - t_1}{\tau}} \Leftrightarrow \Delta t_m = t_1 + \tau \ln \left(\frac{v_{S2} - v_{S0}}{v_{S1} - v_{S0}} \right).$$

Finalement on obtient¹

$$\boxed{\Delta t_m = \tau \ln \left[\left(\frac{v_{S1} - v_{S\infty}}{v_{S2} - v_{S\infty}} \right) \cdot \left(\frac{v_{S2} - v_{S0}}{v_{S1} - v_{S0}} \right) \right]} = \tau \ln \left[\left(\frac{v_{S0} - 3v_{S\infty}/2}{v_{S0} - v_{S\infty}} \right) \cdot \left(\frac{v_{S0} + v_{S\infty}}{v_{S0} + v_{S\infty}/2} \right) \right] = 2,2 \times 10^{-8} \text{ s}.$$

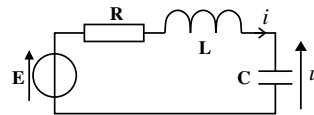
D'où la bande passante $\boxed{B = \frac{1}{\Delta t_m}} = 46 \text{ Mb.s}^{-1}$.

1. Sans l'erreur d'énoncé indiquée précédemment, on obtiendrait un résultat indépendant de v_{S0} et $v_{S\infty}$, mais des valeurs numériques semblables :

$$\boxed{\Delta t_m = \tau \ln 3} = 2,2 \times 10^{-8} \text{ s} \quad \text{et} \quad \boxed{B = 46 \text{ Mb.s}^{-1}}.$$

II. Etincelle de rupture

1.



La loi des mailles s'écrit

$$E = Ri + L \frac{di}{dt} + u \quad \text{avec} \quad i = C \frac{du}{dt},$$

ce qui conduit à

$$\boxed{\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 E} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \quad \text{et} \quad \boxed{Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}}.$$

2. $Q = 500 \gg 1$. Donc le discriminant de l'équation caractéristique $\Delta = \omega_0^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 4 \right)$ est négatif. Ainsi le régime transitoire est pseudo-périodique :

$$\boxed{u(t) = E + e^{-\frac{t}{\tau}} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t))} \quad \text{avec} \quad \boxed{\tau = \frac{2Q}{\omega_0} = \frac{2L}{R}} \quad \text{et} \quad \boxed{\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}.$$

3. Le temps caractéristique des variations de $u(t)$ est la pseudo-période

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0} \left(1 - \frac{1}{4Q^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \approx \frac{2\pi}{\omega_0} \quad \text{car} \quad Q \gg 1, \quad \text{donc} \quad \boxed{\frac{\tau}{T} \approx \frac{\tau \omega_0}{2\pi} = \frac{Q}{\pi}} \approx 159 \gg 1.$$

4. On écrit donc $u(t) = E + A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$ (car $\omega \approx \omega_0$). À l'instant initial, la tension aux bornes du condensateur est continue et c'est celle d'un simple fil, donc $u(0) = 0$. Le courant est continu à cause de la bobine, et sa valeur est donnée par le circuit en régime permanent sans la capacité. La bobine équivaut alors à un fil et $i(0) = E/R$.

On a donc

$$u(0) = 0 = E + A \Leftrightarrow A = -E \quad \text{et} \quad i(0) = \frac{E}{R} = CB\omega_0 \Leftrightarrow B = \frac{E}{RC\omega_0} = EQ.$$

Cela conduit à $\boxed{u(t) = E (1 - \cos(\omega_0 t) + Q \sin(\omega_0 t))}$.

5. Le second terme sinusoïdal a donc une amplitude beaucoup plus grande que le premier. Il va rapidement dominer dès les premiers instants. On peut s'en convaincre en ré-écrivant :

$$u(t) = E + E\sqrt{1+Q^2} \left(-\frac{1}{\sqrt{1+Q^2}} \cos(\omega_0 t) + \frac{Q}{\sqrt{1+Q^2}} \sin(\omega_0 t) \right) = E - E\sqrt{1+Q^2} \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\text{avec} \quad \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1+Q^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{Q}{\sqrt{1+Q^2}}, \quad \text{et} \quad \tan \varphi = Q.$$

Comme $Q \gg 1$, on a $\varphi \approx \frac{\pi}{2}$ (1er quadrant) et $\sqrt{1+Q^2} \approx Q$, d'où finalement $\boxed{u(t) \approx E + EQ \sin(\omega_0 t)}$. Ainsi la tension $u(t)$ commence par croître, et ce rapidement puisque son amplitude QE est beaucoup plus grande que le régime permanent qu'il devrait atteindre (à savoir E). La tension de claquage est atteinte à l'instant t_c tel que

$$V_c = E + EQ \sin(\omega_0 t_c) \Leftrightarrow \boxed{t_c = \sqrt{LC} \arcsin \left(\frac{V_c/E - 1}{Q} \right)} = 4,0 \times 10^{-10} \text{ s}.$$

En comparaison, la période propre du circuit vaut $\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{LC}} = 1,3 \times 10^{-6} \text{ s}$, ce qui confirme que l'étincelle intervient très rapidement par rapport à la dynamique propre du circuit.