MÉCANIQUE ET ANALYSE DIMENSIONNELLE

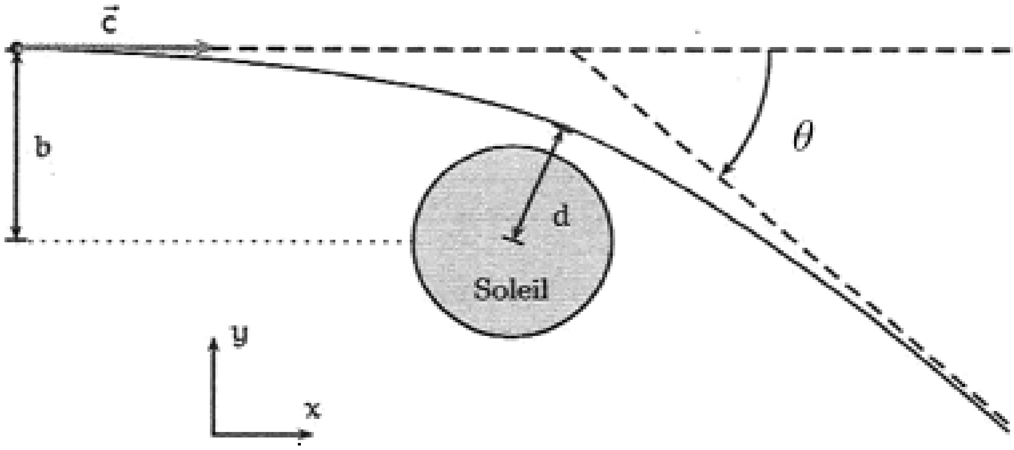
Soignez la présentation et la rédaction, qui doit être complète et concise. Tout résultat doit être justifié, et mis en valeur. Les résultats doivent d'abord être écrits sous forme littérale et doivent être homogènes. Les résultats numériques doivent avoir un nombre de chiffres significatifs vraisemblable. Les schémas doivent être clairs, suffisamment grands et lisibles. Si vous n'arrivez pas à montrer un résultat, admettez-le clairement et poursuivez.

CALCULATRICES AUTORISÉES

I. Déviation de la lumière par le Soleil

Einstein édite en 1915 la théorie de la relativité générale. Il y décrit la gravitation comme une modification de l'espace-temps, prédisant ainsi des effets tels que la déviation de la lumière par des corps massifs. Einstein avait prévu par exemple qu'en cas d'éclipse de Soleil, on devait pouvoir observer des étoiles qui auraient dû être occultées par le bord de celui-ci. Cet effet a été observé pour la première fois en 1919 et largement confirmé depuis. Le but de cet exercice est de déterminer, de manière simple, l'ordre de grandeur de l'angle de déviation d'un rayon lumineux frôlant le Soleil.

Un rayon lumineux arrive au voisinage du Soleil avec un *paramètre d'impact* noté b (cf figure ci-dessous, b est la distance entre le Soleil et le rayon lumineux incident s'il était non dévié c'est-à-dire rectiligne). Soient M_S et R_S la masse et le rayon du Soleil, supposé sphérique et homogène. On note c la vitesse de la lumière dans le vide et $\mathcal{G}$ la constante de la gravitation universelle.



Données :
- $M_S = 2,0 \times 10^{30}\,\text{kg}$;
- $R_S = 7,0 \times 10^{8}\,\text{m}$;
- $c = 3,0 \times 10^{8}\,\text{m.s}^{-1}$;
- $\mathcal{G} = 6,67 \times 10^{-11}$ SI (unité non fournie).

1. On cherche une relation donnant la déviation θ sous la forme

$$\theta = K\,\mathcal{G}^{\alpha} M_S^{\beta} R_S^{\gamma} c^{\delta}$$

où K est une constante sans dimension de l'ordre de l'unité.

a) Chercher la dimension de $\mathcal{G}$.

b) Proposer des valeurs entières pour les constantes α, β, γ et δ. En cas d'indétermination on choisira la solution la plus simple, en vérifiant que la valeur numérique est vraisemblable.

2. La théorie de la relativité générale d'Einstein prédit la valeur $K = 4$. Évaluer alors l'angle θ en radians, puis en secondes d'arc.
Rappel :
— une minute d'arc : $1' = \frac{1}{60}\,°$ (un soixantième de degré).
— une seconde d'arc : $1'' = \frac{1}{60}\,'$

3. Rutherford montra la structure lacunaire de l'atome en bombardant des atomes d'or avec un faisceau de particules α (He^{2+}) dont il étudia les déviations.
On peut montrer en mécanique newtonienne que l'angle de déviation ψ d'une particule α (de charge q, d'énergie cinétique $\mathcal{E}_{k0} = \frac{1}{2}mv^2$, et de paramètre d'impact b) par un noyau d'or (de charge Q) est donné par :

$$\tan\frac{\psi}{2} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{2b\mathcal{E}_{k0}}$$

Or bien avant Einstein, Newton avait eu l'intuition que la lumière peut être constituée de particules sensibles à l'interaction gravitationnelle.

a) En faisant une analogie entre les forces d'interaction électrostatique (loi de Coulomb) et gravitationnelle, proposer une expression de $\tan\frac{\psi}{2}$ dans le cas où ψ serait la déviation d'un corps de masse m à l'approche d'un astre massif de masse M.

b) En considérant des particules de lumière de masse m (bien qu'on sache aujourd'hui que les photons sont de masse nulle), montrer alors que l'angle de déviation θ_N prédit par la mécanique newtonienne est deux fois plus faible que celui trouvé ci-dessus en **1.** (θ) par la relativité générale et vérifié expérimentalement.

II. Jour sidéral et lunaison

La trajectoire de la Terre dans le référentiel de Copernic est une ellipse quasi circulaire dont le foyer est le centre du Soleil. La Terre tourne aussi autour de l'axe reliant ses pôles dans un mouvement de rotation propre, dans le même sens qu'elle tourne autour du soleil.

1. Un jour solaire est par définition la durée entre deux passages du Soleil à la verticale d'un même méridien. Cette grandeur est-elle constante ? Pourquoi ?

2. Un jour sidéral est la période de rotation propre de la Terre. Combien y a-t-il de jours sidéraux pendant une année sachant qu'une année dure 365,256 jours solaires moyens de 86400 s ($T_{\text{sol}} = 1\,\text{j} = 86400\,\text{s}$) ? On pourra s'appuyer sur un schéma.
En déduire la durée T_{sid} d'un jour sidéral, puis la vitesse angulaire ω_T de rotation propre de la Terre.

3. On suppose pour simplifier que le plan contenant la trajectoire de la Lune autour de la Terre est confondu avec le plan de l'écliptique [1] (plan contenant la trajectoire de la Terre autour du Soleil).
Calculer la durée T_{lun} d'une *lunaison*, à savoir la durée séparant deux situations consécutives d'alignement du Soleil, de la Lune et de la Terre, dans cet ordre.
On donne la période de rotation de la Lune autour de la Terre : $T_0 = 27,322\,\text{j}$.

III. Vitesse maximale d'un véhicule

Un automobiliste parcourt une distance $d = 1,25\,\text{km}$ sur une route rectiligne à la vitesse moyenne $v_m = 75\,\text{km.h}^{-1}$. Le mouvement, qui comprend trois phases, est d'abord uniformément accéléré avec une accélération $a = 2,5\,\text{m.s}^{-2}$, puis uniforme, puis uniformément décéléré avec une accélération $-a$.
Déterminer littéralement puis numériquement la vitesse maximale de l'automobiliste.

1. L'angle entre ces deux plans vaut en fait $5°9'$.

IV. Mouvement d'un bolide

Un bolide roulant de fête foraine de masse m doit descendre une piste plane de forme parabolique d'équation $y = -ax^2$ ($a > 0$). Il est lancé avec une vitesse horizontale $v_0\vec{u}_x$. Les frottements sont supposés négligeables. On souhaite savoir si le bolide peut décoller de la piste. On supposera donc que le bolide est en contact avec la piste, de façon à trouver à quelle condition ce n'est pas possible.

1. Faire un bilan des forces extérieures appliquées au bolide et les représenter sur un schéma avec la trajectoire.
Ènoncer le Théorème de la Résultante Cinétique (TRC).

2. Exprimer le vecteur vitesse en fonction notamment de x et $\dot{x}$ sur la base cartésienne.
De même, exprimer le vecteur accélération en fonction notamment de x, $\dot{x}$ et $\ddot{x}$.

3. On souhaite projeter le TRC dans une base de Frenet $(\vec{t};\vec{n})$. Proposer une expression en fonction de x pour les vecteurs unitaires tangent $\vec{t}$ (dans le sens du mouvement) et normal $\vec{n}$ (orienté vers la convexité de la courbe).

4. En projetant convenablement le TRC, en déduire l'expression de la norme N de la réaction normale de la piste, en fonction de x, $\dot{x}$, et des paramètres physiques du problème.

5. On admet que le théorème de l'énergie mécanique nous permet d'écrire la loi de conservation suivante :

$$\vec{v}^2 = v_0^2 + 2gax^2 \,.$$

En déduire l'expression de $\dot{x}$ en fonction de x et des paramètres du problème.

6. En déduire l'expression de N uniquement en fonction de x et des paramètres physiques du problème.
Conclure sur la possibilité d'un décollage de la piste.

7. La présence de frottements solides risque-t-elle de modifier ce résultat ? Si oui dans quel sens ? Justifier.

* * * Fin de l'épreuve * * *