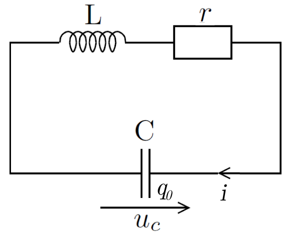
ELECTROCINÉTIQUE

I. Circuit RLC série en régime libre

1.



On oriente le courant en convention croisée pour le condensateur.
Loi des mailles : $u_c + ri + L\frac{di}{dt} = 0$. En injectant $i = C\frac{du_c}{dt}$ on obtient $\boxed{\ddot{u}_c + \frac{\omega_0}{Q}\,\dot{u}_c + \omega_0^2\,u_c = 0}$ avec $\boxed{\omega_0 = 1/\sqrt{LC} \text{ et } Q = \frac{1}{r}\sqrt{L/C}}$.
On pose aussi $\frac{2}{\tau} = \frac{\omega_0}{Q}$ d'où $\boxed{\tau = \frac{2Q}{\omega_0} = \frac{2L}{R}}$.

2. Pour $r = 0$ le régime est harmonique. La solution générale s'écrit $u_c(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$. La charge du condensateur et le courant sont continus donc $q_0/C = A$ et $i(0) = 0 = CB\omega_0$. D'où $\boxed{u_c(t) = q_0/C\,\cos(\omega_0 t)}$. Ce signal oscille à la période $\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{LC}}$.

3. **a)** Le régime oscille autour du régime permanent $u_c = 0$, donc c'est un régime pseudopériodique. Le discriminent de l'équation caractéristique est donc négatif :

$$\frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 < 0 \quad\Leftrightarrow\quad Q > \frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad \boxed{r < 2\sqrt{L/C}}.$$

b) La forme générale de la solution est

$$u_c(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}\left(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right) = D\,e^{-\frac{t}{\tau}}\cos(\omega t + \varphi) \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}}}$$

(par résolution de l'équation caractéristique $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$). On détermine les constantes par les conditions initiales, par continuité de la tension aux bornes du condensateur (charge q_0) et du courant traversant la bobine (nul lorsque le circuit est ouvert) :

$$u_c(0) = \frac{q_0}{C} = A \quad \text{et} \quad i(0)/C = 0 = -\frac{A}{\tau} + B\omega \quad\Rightarrow\quad B = \frac{q_0}{C\omega\tau}$$

Finalement $\boxed{u_c(t) = \frac{q_0}{C}e^{-\frac{t}{\tau}}\left(\cos(\omega t) + \frac{1}{\tau\omega}\sin(\omega t)\right) = D\,e^{-\frac{t}{\tau}}\cos(\omega t + \varphi)}$ avec $\boxed{D = \frac{q_0}{C}\sqrt{\left(1 + \frac{1}{\tau^2\omega^2}\right)}}$,

et $\boxed{\varphi = -\arctan\left(\frac{1}{\tau\omega}\right)}$.

Remarque : on peut aussi appliquer les conditions initiales en passant directement par la forme $u_c(t) = D\,e^{-\frac{t}{\tau}}\cos(\omega t + \varphi)$ *:*
$u_c(0) = q_0/C = D\cos\varphi$ *et* $i(0)/C = D(-\frac{1}{\tau}\cos\varphi - \omega\sin\varphi) = 0$. *On en déduit* $\tan\varphi = -\frac{1}{\tau\omega}$ *avec* $\varphi \in]-\frac{\pi}{2}, 0]$, *donc* $\boxed{\varphi = -\arctan\left(\frac{1}{\tau\omega}\right)}$. *Puis* $\boxed{D = \frac{q_0/C}{\cos\varphi} = \frac{q_0}{C}\sqrt{1 + \tan^2\varphi} = \frac{q_0}{C}\sqrt{\left(1 + \frac{1}{\tau^2\omega^2}\right)}}$.

c) L'équation étant sans second membre (régime libre), la solution se limite au régime transitoire pseudo-périodique. Alors par définition $\boxed{\delta = \ln\frac{u_c(t_m)}{u_c(t_m + T)}}$ en notant t_m un instant où u_c est maximale ou

minimale.
Comme $T = \frac{2\pi}{\omega}$ est la pseudo-période on obtient $u_c(t_m + T) = e^{-\frac{T}{\tau}}.u_c(t_m)$. D'où

$$\boxed{\delta = \frac{T}{\tau} = \frac{\pi\omega_0}{\omega Q} = \frac{\pi}{Q}\left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)^{-\frac{1}{2}}}.$$

Compte-tenu du fait que l'on observe environ 5 oscillations sur le chronogramme, on s'attend à avoir $Q \approx 5$ donc $Q^2 \gg 1$ et donc $\omega \approx \omega_0$ (ou $T \approx T_0$) et simplement $\boxed{\delta \approx \frac{\pi}{Q}}$.

4. **a)** On mesure la pseudo-période par l'écartement des zéros du régime transitoire, espacés de $T/2$, c'est-à-dire les points où u_c s'annule ici. On compte 10 zéros en $9,0\,\mu s$, donc $T = 2,0\,\mu s$.

b) *Il n'est pas très prudent d'utiliser le point en $t = 0$ car on n'est pas certain que ce soit vraiment un maximum.* En utilisant le premier maximum et le dernier (5ème), on obtient $\delta = \ln(1,7/0,15)/4 \approx 0,61$. En utilisant le premier et le second minimum (pics les plus hauts pour une meilleure précision), on obtient $\delta = \ln(1,2/0,65) \approx 0,61$ ($\delta \approx 0,58$ avec les 2 premiers maxima, a priori moins précis). On en déduit $\boxed{Q \approx \frac{\pi}{\delta}} \approx 5,2$, et $\boxed{\tau = \frac{T}{\delta}} = 3,3\,\mu s$.

Remarque : le calcul exact aurait donné $Q = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\pi^2}{\delta^2}} = 5,2$. *Pas de différence à ce niveau de précision.*

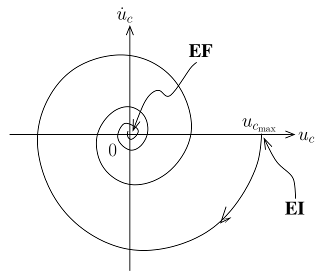
c) $\boxed{\frac{T - T_0}{T_0} = \left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1} \approx 0,5\,\%$.

d) On en déduit que $\omega_0 \approx \omega = 2\pi/T$ à $0,5\,\%$ près. Or $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ donc $\boxed{L \approx \frac{T^2}{4\pi^2 C}} \approx 1,0\,\text{mH}$.

e) Sur le graphe, on lit la valeur maximale à l'instant initial : $u_{c_{max}} = 1,6\,\text{V}$, d'où $\boxed{q_0 = Cu_{c_{max}}} = 1,6 \times 10^{-10}\,\text{C}$.

5. On obtient le portrait ci-contre :

Celui-ci tourne nécessairement dans le sens horaire, depuis l'état initial (EI) ($u_c = \frac{q_0}{C}, \dot{u}_c(0) = \frac{i(0)}{C} = 0$) vers l'état final (EF) ($u_c = 0, \dot{u}_c = 0$) (condensateur déchargé et coupant le circuit en régime stationnaire).



6. $i = C\frac{du_c}{dt}$ d'où $\boxed{i(t) = -q_0\omega\left(1 + \frac{1}{\tau^2\omega^2}\right)e^{-\frac{t}{\tau}}\sin(\omega t)}$ (le terme en $\cos(\omega t)$ disparaît).

Comme $Q \gg 1$, on obtient à la limite $\omega \approx \omega_0$, et $\omega_0\tau = 2Q \gg 1$ donc $\boxed{i(t) \approx -\omega_0 q_0\,e^{-\frac{t}{\tau}}\sin(\omega_0 t)}$.

7. L'énergie est stockée sous forme électrique dans le condensateur et magnétique dans la bobine : $\mathcal{E} = \mathcal{E}_e + \mathcal{E}_m = \frac{1}{2}Cu_c^2 + \frac{1}{2}Li^2$. Comme $Q \gg 1$, on a aussi $u_c \approx \frac{q_0}{C}\,e^{-\frac{t}{\tau}}\cos(\omega_0 t)$, ce qui mène à

$$\mathcal{E} \approx \frac{1}{2}\frac{q_0^2}{C}\,e^{-\frac{2t}{\tau}}\cos^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2}\frac{q_0^2}{C}\,e^{-\frac{2t}{\tau}}\sin^2(\omega_0 t) \quad \text{donc} \quad \boxed{\mathcal{E} \approx \frac{1}{2}\frac{q_0^2}{C}\,e^{-\frac{2t}{\tau}}}$$

8. D'après l'expression ci-dessus, qui est approximative, $\mathcal{E}$ décroît au cours du temps. Ce résultat est correct car le bilan de puissance du circuit s'écrit : $i\,u_c + iL\frac{di}{dt} = -ri^2$. Avec $i = C\frac{du_c}{dt}$ on obtient

$$\boxed{\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -ri^2 < 0}.$$

Ainsi l'énergie stockée est dissipée à tout instant par effet Joule dans la résistance.

9. $\boxed{\alpha = 1 - \dfrac{E(t+T)}{E(t)} \approx 1 - e^{-\frac{2T}{\tau}}} = \underline{0,70}$. **70% de l'énergie stockée à un instant sera perdue au bout d'une pseudo-période**.

II. Analogie et étude de cavités résonantes *(d'après CAPES Externe 2011)*

II.1. Etude du modèle idéal

1. On additionne les admittances puisque les deux dipôles sont en parallèle : $\boxed{\underline{Z} = \left(jC\omega + \dfrac{1}{jL\omega})\right)^{-1}}$.

2. On a d'abord $i_1 = u/R$ avec $u = U_m \cos(\omega t)$, donc $\boxed{i_1(t) = \dfrac{U_m}{R}\cos(\omega t)}$.

Pour i_2, on travaille avec les grandeurs complexes associées. On a $\underline{i_2} = \underline{u}/\underline{Z} = j\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)\underline{u}$. L'amplitude s'obtient par le module, $|\underline{i_2}| = |C\omega - \frac{1}{L\omega}|\, U_m$. On observe qu'elle s'annule pour $\omega = 1/\sqrt{LC}$, ce qui répond à la question suivante en posant $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.
L'argument est $\arg[\underline{i_2}] = \arg[j] + \arg[C\omega - \frac{1}{L\omega}] + \arg[\underline{u}] = \frac{\pi}{2} + \arg[C\omega - \frac{1}{L\omega}] + \omega t$. Donc $\arg[C\omega - \frac{1}{L\omega}] = 0$ si $C\omega - \frac{1}{L\omega} > 0 \Leftrightarrow \omega > \omega_0$ et $\arg[C\omega - \frac{1}{L\omega}] = -\pi \quad [2\pi]$ si $C\omega - \frac{1}{L\omega} < 0 \Leftrightarrow \omega < \omega_0$. On en déduit finalement que $i_2 = U_m\,|C\omega - \frac{1}{L\omega}|\,\cos(\omega t \pm \frac{\pi}{2})$ avec un $+$ si $\omega > \omega_0$ et un $-$ sinon. Cela peut se récrire $i_2 = \mp U_m\,|C\omega - \frac{1}{L\omega}|\,\sin(\omega t)$, c'est-à-dire $\boxed{i_2(t) = U_m\left(\dfrac{1}{L\omega} - C\omega\right)\sin(\omega t)}$ quelque soit ω.

3. D'après la question précédente, $i_2 = 0$ si $\omega = \boxed{\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}}$.

II.2. Etude du modèle "réel"

4. Cette fois $\boxed{\underline{Z} = \left(jC\omega + \dfrac{1}{r + jL\omega})\right)^{-1}}$.

5. En introduisant ω_0 on obtient $\underline{Z} = \left(j\sqrt{\frac{C}{L}}\,x + \frac{1}{r + j\sqrt{\frac{L}{C}}\,x})\right)^{-1}$. On forme un facteur sans dimension que l'on manipule ensuite : $\underline{Z} = r\left(jr\sqrt{\frac{C}{L}}\,x + \frac{1}{1 + j\frac{1}{r}\sqrt{\frac{L}{C}}\,x})\right)^{-1} = r\,\frac{1 + j\frac{1}{r}\sqrt{\frac{L}{C}}\,x}{1 + jr\sqrt{\frac{C}{L}}\,x\left(1 + j\frac{1}{r}\sqrt{\frac{L}{C}}\,x\right)} = r\,\frac{1 + j\frac{1}{r}\sqrt{\frac{L}{C}}\,x}{1 - x^2 + jr\sqrt{\frac{C}{L}}\,x}$. D'où $\boxed{\underline{Z} = r\,\dfrac{1 + jQx}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}}$ en posant $\boxed{Q = \dfrac{1}{r}\sqrt{\dfrac{L}{C}} = \dfrac{L\omega_0}{r}}$, et donc $\boxed{|\underline{Z}| = r^2\,\dfrac{1 + Q^2x^2}{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$.

6. Le dipôle $\{r, L\}$ est soumis à la tension u. La loi d'Ohm complexe donne $\underline{i_L} = \underline{u}/(r + jL\omega)$.

En prenant le module on obtient $\boxed{I_0 = \dfrac{U_m}{\sqrt{r^2 + L^2\omega^2}}}$.

D'autre part, $\arg[\underline{i_L}] = \arg[\underline{u}] - \arg[r + jL\omega] \Leftrightarrow \omega t + \alpha = \omega t + \arg[r - jL\omega] \Leftrightarrow \boxed{\alpha = \arg[r - jL\omega] = -\arctan\left(\dfrac{L\omega}{r}\right)}$.

7. Lorsque $\frac{L\omega}{r} \to \infty$, on a $\boxed{\alpha \longrightarrow -\dfrac{\pi}{2}}$. Sachant que la tension u s'applique aussi au condensateur, dans ces conditions i_L est en retard de phase sur u et en quadrature.

8. De l'énergie est stockée sous forme électrostatique dans le condensateur ($\mathcal{E}_e$), et sous forme magnétique dans la bobine ($\mathcal{E}_m$). Au total on a

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_e + \mathcal{E}_m = \frac{1}{2}Cu^2 + \frac{1}{2}Li_L^2 = \frac{1}{2}\left(CU_m\cos^2(\omega_0 t) + LI_0^2\cos^2(\omega_0 t - \frac{\pi}{2})\right) = \frac{1}{2}\left(CU_m^2\cos^2(\omega_0 t) + LI_0^2\sin^2(\omega_0 t)\right).$$

Or on a $I_0 \approx U_m/(L\omega)$ car $L\omega/r \gg 1$. Donc pour $\omega = \omega_0$ cela donne $I_0 \approx \sqrt{\frac{C}{L}}\,U_m$, et donc $CU_m^2 = LI_0^2$.

Ceci conduit à $\mathcal{E} = \frac{1}{2}LI_0^2\left(\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t)\right)$ donc $\boxed{\mathcal{E} = \dfrac{1}{2}LI_0^2}$. On remarque qu'à cette pulsation, l'énergie totale stockée dans le circuit ne dépend pas du temps, bien que les énergies stockées dans le condensateur d'une part et la bobine d'autre part dépendent naturellement du temps. Rappelons que ce résultat n'est vrai que sous l'hypothèse $r \ll L\omega_0$.

9. La puissance moyenne reçue et donc dissipée dans la résistance r s'écrit

$$\mathcal{P} = < ri_L^2(t) > = rI_0^2 < \cos^2(\omega t + \alpha) > \quad \text{donc} \quad \boxed{\mathcal{P} = \frac{1}{2}rI_0^2}.$$

D'après les questions précédentes on a $\frac{I_0^2}{2} = \frac{\mathcal{E}}{L}$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{L}{C}}$, ce qui donne

$$\mathcal{P} = \frac{r}{L}\,\mathcal{E} = \frac{1}{\sqrt{LC}}\,r\sqrt{\frac{C}{L}}\,\mathcal{E} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\mathcal{P} = \frac{\omega_0\mathcal{E}}{Q}}.$$

10. Traduisons les données de l'énoncé : $\omega_0 U = P_{\text{amb}}\,Q_{\text{amb}} = P_{4\,\text{K}}\,Q_{4\,\text{K}}$. D'où $\boxed{P_{\text{amb}} = P_{4\,\text{K}}\,\dfrac{Q_{4\,\text{K}}}{Q_{\text{amb}}}} = \underline{5 \times 10^6\,\text{W}}$.

La puissance trouvée ci-dessus est énorme, et elle est dissipée par la cavité par effet Joule donc perdue, car elle ne sert pas effectivement à accélérer les particules. Si l'on travaille avec des cavités supraconductrices, la résistance devient très faible ($r \longrightarrow 0$) donc le facteur de qualité devient très grand ($Q \longrightarrow \infty$). Ainsi, on fait décroître la proportion de la puissance consommée perdue par effet Joule. L'état de supraconductivité s'obtient à des températures très basses, d'où le 4 K dans l'énoncé.