

Oscillateurs mécaniques

Table des matières

I Oscillateurs harmoniques - Approche énergétique	1
1 Equation du mouvement	1
2 Mouvement	2
3 Théorème d'équipartition de l'énergie	2
II Oscillateurs amortis	3
1 Régime libre (rappels)	3
a Etude dynamique	3
b Analogies électromécaniques	4
c Régimes transitoires	4
d Etude énergétique	5
2 Régime sinusoïdal forcé	5
a Etude dynamique	5
b Amplitudes complexes et impédances mécaniques	6
c Résonance en élongation	6
d Résonance en vitesse	7
e Etude énergétique	7
III Oscillateurs non linéaires	8
1 Calcul de la période des oscillations dans le cas général	8
2 L'exemple du pendule simple	8
a Conséquences d'une force de rappel non linéaire	8
b Portrait de phase	9
3 Oscillateurs auto-entretenus	9

I. Oscillateurs harmoniques - Approche énergétique

I.1. Equation du mouvement

En partant de considérations énergétiques, nous avons montré (Chap.4) que **tout système conservatif à un degré de liberté se comporte, au voisinage d'une position d'équilibre stable, comme un oscillateur.**

Considérons son intégrale première du mouvement pour l'énergie, elle prend toujours la forme générale :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}I(q)\dot{q}^2 + E_p(q) = \text{constante} \quad \text{avec} \quad I(q) > 0.$$

La position d'équilibre stable est notée q_0 , c'est donc un minimum d'énergie potentielle et on a alors

$$\frac{dE_p}{dq}(q_0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2E_p}{dq^2}(q_0) \geq 0.$$

On se place maintenant dans le cas où la dérivée seconde ne s'annule pas, et on pose

$$\kappa = \frac{d^2E_p}{dq^2}(q_0) > 0.$$

Pour de petites oscillations au voisinage de q_0 , on peut alors développer l'intégrale première à l'ordre 2, en notant $q = q_0 + \varepsilon$:

$$E_c(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} I(q)\dot{q}^2 = \frac{1}{2} I(q_0)\dot{\varepsilon}^2 + \frac{1}{2} \frac{dI}{dq}(q_0) \varepsilon \dot{\varepsilon}^2 + o(\varepsilon \dot{\varepsilon}^2) = \frac{1}{2} I(q_0) \dot{\varepsilon}^2 + o(\dot{\varepsilon}^2)$$

$$E_p(q) = E_p(q_0) + \frac{1}{2}\kappa \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)$$

On reconnaît ici que l'énergie potentielle a un **profil de puits parabolique au voisinage du minimum** q_0 , comme l'énergie potentielle élastique d'un ressort de raideur κ et d'allongement ε . Ce profil est appelé *potentiel harmonique*.

Donc en tronquant ce développement limité on obtient la forme asymptotique suivante :

$$E_m \approx E_p(q_0) + \frac{1}{2} I(q_0) \dot{\varepsilon}^2 + \frac{1}{2}\kappa \varepsilon^2 = \text{constante}.$$

Si l'on re-dérive cette équation par rapport au temps, on retrouve après simplification par $\dot{\varepsilon}$ l'équation générale d'un **oscillateur harmonique** :

$$\ddot{\varepsilon} + \omega_0^2 \varepsilon = 0 \quad \text{ou} \quad \ddot{q} + \omega_0^2 q = \omega_0^2 q_0. \tag{1}$$

On définit la *pulsation propre* de l'oscillateur¹ $\omega_0 = \sqrt{\kappa/I(q_0)}$, sa *fréquence propre* $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$, et la *période* des oscillations $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{1}{f_0}$.

THÉORÈME : Au voisinage d'une **position d'équilibre stable** q_0 , un système **conservatif** à un degré de liberté se comporte comme un **oscillateur harmonique**^a. Sa pulsation propre est alors reliée à l'énergie potentielle par :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{I(q_0)} \frac{d^2 E_p}{dq^2}(q_0)} \quad \text{avec} \quad E_c = \frac{1}{2} I(q) \dot{q}^2.$$

a. ... à condition que la dérivée seconde de l'énergie potentielle ne s'annule pas ! Auquel cas on peut avoir une position d'équilibre stable sans que le potentiel soit quadratique / harmonique. Par exemple si $E_p(q) \approx \frac{1}{2} k q^4$. Les petits mouvements autour de la position d'équilibre stable (ici $q = 0$) ne sont alors pas sinusoïdaux.

L'intérêt de ce modèle réside donc dans son caractère très général, car il décrit de nombreux systèmes physiques, au delà même du seul domaine de la mécanique.

REMARQUE : si l'on avait développé au voisinage d'une position d'équilibre instable, on aurait posé $\kappa = -\frac{d^2 E_p}{dq^2}(q_0) > 0$ et obtenu $\ddot{\varepsilon} - \omega_0^2 \varepsilon = 0$, qui est une équation instable.

I.2. Mouvement

La résolution de l'équation différentielle (1) donne

$$q(t) = q_0 + q_m \cos(\omega_0 t + \varphi) = q_0 + A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$$

1. Retrouvons quelques cas connus :

- Une masse au bout d'un ressort : $q = x$ ou z , $I(q) = m$, $\kappa = k$, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.
- Une masse accrochée à un fil inextensible de longueur ℓ_0 : $q = \theta$, $I(q) = m\ell_0^2$, $\kappa = mg\ell_0$, $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell_0}}$.
- Une bille roulant sur un support $z = z(x)$: $q = x$, $I(x) = m \left(1 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \right)$, $\kappa = mg \frac{d^2 z}{dx^2}(x_0)$ et $\omega_0 = \sqrt{g \frac{d^2 z}{dx^2}(x_0)}$.

qui représente des oscillations² d'amplitude q_m à la période $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I(q_0)}{\kappa}}$ autour de la position moyenne q_0 .

On note que **la période ne dépend pas de l'amplitude des oscillations, ce qui est caractéristique d'un oscillateur harmonique**. On dit qu'il y a *isochronisme* des oscillations.

I.3. Théorème d'équipartition de l'énergie

Pour tout oscillateur, on peut toujours prendre l'origine spatiale en la position d'équilibre, par le changement de variable $\varepsilon = q - q_0$. L'Eq. (1) s'écrit alors :

$$\ddot{\varepsilon} + \omega_0^2 \varepsilon = 0$$

En multipliant par la vitesse $\dot{\varepsilon}$ et en intégrant, on retrouve l'intégrale première du mouvement pour l'énergie

$$\frac{1}{2} \dot{\varepsilon}^2 + \frac{1}{2} \omega_0^2 \varepsilon^2 = \text{constante}$$

qui à un coefficient près est l'équation de l'énergie mécanique (ex : si ε est une distance, il faut multiplier par une masse). Le premier terme est relatif à l'énergie cinétique. Le second est relatif à l'énergie potentielle, en forme de puits de potentiel parabolique.

En utilisant l'expression de la solution $\varepsilon(t) = \varepsilon_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$, on peut calculer la valeur moyenne de l'énergie cinétique et celle de l'énergie potentielle sur une période. Au coefficient de proportionnalité près (commun à E_c et E_p), on aura

$$\begin{aligned} \langle E_c \rangle &\# \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} \dot{\varepsilon}(t)^2 dt = \frac{1}{4} \omega_0^2 \varepsilon_m^2 \\ \langle E_p \rangle &\# \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} \omega_0^2 \varepsilon(t)^2 dt = \frac{1}{4} \omega_0^2 \varepsilon_m^2 \end{aligned}$$

2. La seconde forme est moins lisible mais plus pratique pour le calcul des conditions initiales. Pour passer de l'une à l'autre on écrit que

$$\begin{aligned} q_m \cos(\omega_0 t + \varphi) &= q_m (\cos \varphi \cos \omega_0 t - \sin \varphi \sin \omega_0 t) \\ A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t &= \sqrt{A^2 + B^2} \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos \omega_0 t + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin \omega_0 t \right) \end{aligned}$$

d'où on tire

$$(A = q_m \cos \varphi; B = -q_m \sin \varphi) \quad , \quad \text{ou} \quad \left(q_m = \sqrt{A^2 + B^2}; \cos \varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}; \sin \varphi = -\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right).$$

On en déduit qu'**en moyenne, il y a équipartition de l'énergie** entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle :

$$\langle E_c \rangle = \langle E_p \rangle = \frac{1}{2} E_m$$

II. Oscillateurs amortis

Les oscillations de l'oscillateur harmonique seront amorties en présence d'un *phénomène dissipatif*, c'est-à-dire un phénomène qui dissipe l'énergie mécanique. Concernant les oscillateurs mécaniques, il peut s'agir

1. i) d'un frottement fluide linéaire (en $-h\vec{v}$), correspondant à la résistance de l'air (ou d'un autre fluide),
2. ii) d'un frottement fluide non linéaire (en $-\alpha v^2 \frac{\vec{v}}{v}$),
3. iii) d'un frottement solide (en $-T \frac{\vec{v}}{v}$).

Nous allons nous intéresser au cas i), même si il n'est valable que pour des vitesses plutôt faibles, car c'est le seul système qui soit **linéaire**, c'est-à-dire mu par une équation différentielle linéaire à coefficients constants. Le cas ii) n'est pas soluble analytiquement dans le cas général, uniquement dans le cas monodimensionnel. On peut le résoudre numériquement (cf TP Info). Le cas iii) est soluble analytiquement, et donne un amortissement linéaire en fonction du temps (cf TD M5).

II.1. Régime libre (rappels)

a. Etude dynamique

On revient au cas simple du système masse-ressort horizontal, auquel on ajoute la force de frottement $\vec{F} = -h\vec{v}$. Le PFD projeté selon (O_x) mène à l'équation

$$\ddot{x} + \frac{h}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0,$$

à condition de prendre l'**origine au point d'équilibre stable**. On peut récrire cette équation en posant $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\xi = \frac{h}{2m}$

$$\ddot{x} + 2\xi\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (2)$$

Des variantes introduisent le temps caractéristique τ ou le facteur de qualité Q selon

$$2\xi = \frac{2}{\tau} = \frac{\omega_0}{Q}.$$

b. Analogies électromécaniques

L'équation ci-dessus a déjà été rencontrée en électrocinétique dans le cas par exemple du circuit $\{R, L, C\}$ série, pour la charge q portée par une armature du condensateur :

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0 .$$

L'étude de l'évolution libre d'un circuit $\{L, C\}$ nous a conduit aussi à un comportement d'oscillateur harmonique. En écrivant que

$$i = \frac{dq}{dt} \quad \text{et} \quad L \frac{di}{dt} = -\frac{q}{C} ,$$

nous avons entre autre montré la conservation de la somme des énergies électrique (stockée dans le condensateur) et magnétique (stockée dans la bobine) :

$$E_e + E_m = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} L i^2 = \text{constante} .$$

L'ensemble de ces équations nous conduit à écrire des relations d'analogie entre des grandeurs appartenant à des domaines physiques distincts (cf tableau ci-contre). Ces analogies sont à connaître.

Dans le cas mécanique qui nous occupe ici, le facteur de qualité prend les formes

$$Q = \frac{\omega_0}{2\xi} = \frac{m\omega_0}{h} = \frac{k}{h\omega_0} = \frac{1}{h} \sqrt{km} ,$$

que l'on peut rapprocher des formes obtenues en électrocinétique

$$Q = \frac{\omega_0}{2\xi} = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} .$$

On constate donc que de façon analogue, pour le pendule élastique amorti le **facteur de qualité diminue lorsque le frottement augmente**.

c. Régimes transitoires

Le traitement mathématique de l'Eq. (2) est connu. On cherche les solutions sous la forme $Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$. L'équation caractéristique $r^2 + 2\xi r + \omega_0^2 = 0$ donne

Mécanique ($\{m, k, h\}$)	Electricité ($\{L, C, R\}$ série)
x	q
v	i
m	L
k	$\frac{1}{C}$
$F = kx$	$u = \frac{q}{C}$
$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
h	R

3 régimes possibles selon la valeur du discriminant réduit de l'équation caractéristique

$$\Delta' = \xi^2 - \omega_0^2 = \omega_0^2 \left(\frac{1}{4Q^2} - 1 \right) ,$$

donc selon la valeur de Q si ω_0 est fixée.

i) Régime pseudo-périodique : frottement faible, $\Delta' < 0$, ou $Q > \frac{1}{2}$.

$$x(t) = (A \cos \omega t + B \sin \omega t) e^{-\xi t} = D \cos(\omega t + \varphi) e^{-\xi t}$$

avec $\omega = \sqrt{|\Delta'|} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$.

Plus Q est grand, plus la pseudo-période est proche de la période propre $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

ii) Régime critique : frottement moyen, $\Delta' = 0$ ou $Q = \frac{1}{2}$.

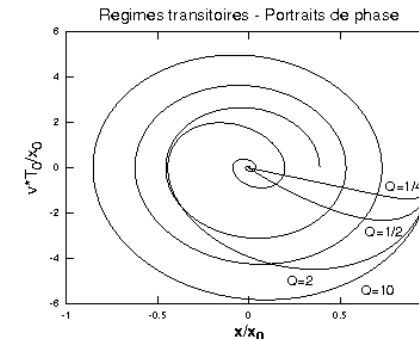
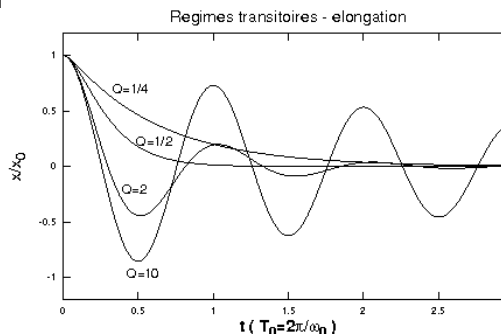
$$x(t) = (At + B) e^{-\xi t} .$$

iii) Régime aperiodique : frottement fort, $\Delta' > 0$ ou $Q < \frac{1}{2}$.

$$x(t) = A e^{-(\xi+\omega)t} + B e^{-(\xi-\omega)t} \quad \text{avec} \quad \omega = \sqrt{\Delta'} = \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} .$$

Plus Q se rapproche de $\frac{1}{2}$, plus le régime s'amortit rapidement.

Tous ces régimes sont **amortis** ($x(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$), avec un **temps caractéristique** de l'ordre de $\tau = \frac{1}{\xi}$ pour **i)** et **ii)**, et $\frac{1}{\xi+\omega}$ pour **iii)**. La figure ci-dessous correspond au cas où la masse est en x_0 à l'instant initial, avec une vitesse nulle.



d. Etude énergétique

L'équation du mouvement ci-dessus (1.a) peut être multipliée par \dot{x} puis intégrée pour retrouver le théorème de la puissance cinétique :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 \right] = -h \dot{x}^2 = -h v^2 < 0 ,$$

qui montre que **l'énergie mécanique est dissipée par la force de frottement**.

Rôle du facteur de qualité :

Dans le cas où le régime libre est pseudo-périodique et **très faiblement amorti** ($Q \gg 1$), on peut considérer que $\omega \approx \omega_0$, et ainsi montrer que l'énergie mécanique vaut approximativement

$$E_m(t) \approx \frac{1}{2} k D^2 e^{-\frac{\omega_0 t}{Q}} .$$

En définissant ΔE_m la perte d'énergie pendant une pseudo-période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$, on peut alors donner une nouvelle interprétation du facteur de qualité car

$$\boxed{\frac{\Delta E_m}{E_m} = \frac{2\pi}{Q}} .$$

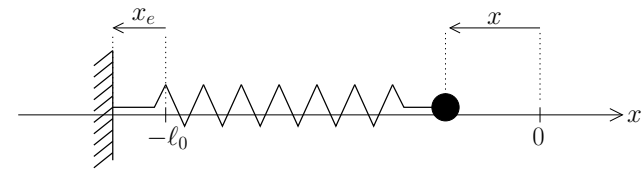
Ainsi, dans le régime pseudo-périodique, **plus Q est grand, plus l'énergie de l'oscillateur est dissipée lentement**.

II.2. Régime sinusoïdal forcé

Nous allons maintenant forcer le mouvement de l'oscillateur. D'après le théorème de Fourier, nous savons que tout forçage périodique se décompose en une somme de forçages sinusoïdaux purs. Or comme le système étudié ici est linéaire (équation différentielle linéaire à coefficients constants), on peut se restreindre à l'étude du régime sinusoïdal forcé.

a. Etude dynamique

Le forçage peut être modélisé en introduisant une force excitatrice extérieure $\vec{f}_e(t)$ qui va s'appliquer au mobile. D'un point-de-vue pratique, le forçage peut aussi être réalisé par un mécanisme excitateur qui déplace le support de fixation du ressort à l'autre extrémité (cf figure ci-dessous).



Notons $x_e(t) - \ell_0$ la position du support, où ℓ_0 est la longueur à vide du ressort, l'origine $x = 0$ étant prise à la position d'équilibre de la masse lorsque le support est immobile en $x = -\ell_0$. Le forçage est donc imposé par une oscillation sinusoïdale du support :

$$x_e(t) = X_e \cos \omega t .$$

L'équation du mouvement devient donc

$$m \ddot{x} + h \dot{x} + kx = kx_e(t) .$$

On voit que cela revient à définir **une force** $f_e(t) = kx_e(t) = m\omega_0^2 x_e(t)$ qui s'appliquerait directement sur la masse m , dans le cas où le support serait immobile. Cette équation peut être réécrite sous la forme

$$\boxed{\ddot{x} + 2\xi \dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_e(t)} , \quad (3)$$

qui a déjà été étudiée en électrocinétique. Nous savons que la solution générale s'écrit

$$x(t) = x_H(t) + x_P(t) ,$$

où $x_H(t)$ la solution générale de l'équation sans second membre (*homogène*, SGEH), et $x_P(t)$ est une solution particulière de l'équation complète (SPEC). En d'autres termes **la solution est la somme d'un régime transitoire $x_H(t)$, et d'un régime permanent $x_P(t)$** . Le régime transitoire s'amortit et disparaît au bout d'un temps de l'ordre de quelques $\tau = \frac{1}{\xi}$, et dès lors le régime permanent devient prédominant.

Le régime transitoire ayant été étudié dans la section précédente (régime libre), nous étudierons ici exclusivement le régime permanent, que l'on notera pour simplifier

$$x(t) = x_P(t) ,$$

en supposant que l'on a attendu suffisamment longtemps pour que le régime transitoire soit négligeable.

b. Amplitudes complexes et impédances mécaniques

Comme la solution va s'écrire

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi),$$

et que l'Eq. (3) est linéaire à coefficients constants, elle est satisfaite aussi par $x(t - \frac{\pi}{2\omega}) = X_m \sin(\omega t + \varphi)$, et donc aussi par les grandeurs complexes $\underline{x} = x(t) + jx(t - \frac{\pi}{2\omega})$:

$$\underline{\ddot{x}} + 2\xi \underline{\dot{x}} + \omega_0^2 \underline{x} = \omega_0^2 \underline{x}_e,$$

en notant

$$\underline{x} = X_m e^{j(\omega t + \varphi)} \quad \text{et} \quad \underline{x}_e = X_e e^{j\omega t}.$$

Les facteurs dépendant du temps se simplifiant, on peut directement travailler avec les amplitudes complexes

$$\underline{X} = X_m e^{j\varphi} \quad \text{et} \quad \underline{X}_e = X_e.$$

On obtient alors

$$\underline{X} = \frac{X_e}{1 - u^2 + j\frac{u}{Q}} \quad \text{avec} \quad u = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

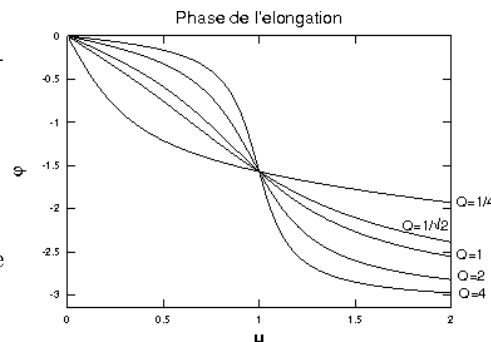
Pour la vitesse $\underline{V} = j\omega \underline{X}$, on obtient

$$\underline{V} = \frac{\omega_0 X_e Q}{1 + jQ(u - \frac{1}{u})}.$$

On en déduit le déphasage entre position et excitation :

$$\begin{aligned} \varphi &= \arg\{\underline{X}\} = \arg\{\underline{V}\} - \frac{\pi}{2} \\ &= -\arctan\left(Q\left(u - \frac{1}{u}\right)\right) - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Ces formules ne sont pas à connaître par coeur, mais à savoir retrouver.



Impédance mécanique complexe :

On a vu plus haut que l'analogie mécanique de la tension $u = \frac{q}{C}$ est la force tension élastique $F = kx$, et que l'analogie du courant i est la vitesse v . Par

analogie avec l'impédance d'un circuit $\{R, L, C\}$ soumis à la tension sinusoïdale d'un générateur en électrocinétique ($\underline{u} = \underline{Zi}$), on peut aussi définir une impédance mécanique reliant la force de l'excitateur $\underline{f}_e = k\underline{x}_e = m\omega_0^2 \underline{x}_e$ à la vitesse $\underline{\dot{x}} = j\omega \underline{x}$. En repartant de l'équation du mouvement $m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = kx_e(t)$, on obtient

$$\underline{f}_e = \underline{Z} \underline{\dot{x}} \quad \text{avec} \quad \underline{Z} = h + jm\omega + \frac{k}{j\omega}.$$

On reconnaît de nouveau l'analogie respective entre les différentes grandeurs (h, m, k) et $(R, L, \frac{1}{C})$. A ce stade on peut entrevoir qu'un **oscillateur mécanique linéaire pourra toujours être représenté par un circuit électrique** dont les impédances électriques correspondent aux impédances mécaniques... d'où l'intérêt des TP d'électrocinétique!

c. Résonance en élongation

L'amplitude de l'élongation est donnée par

$$X_m = \frac{X_e}{\sqrt{(1 - u^2)^2 + \frac{u^2}{Q^2}}}.$$

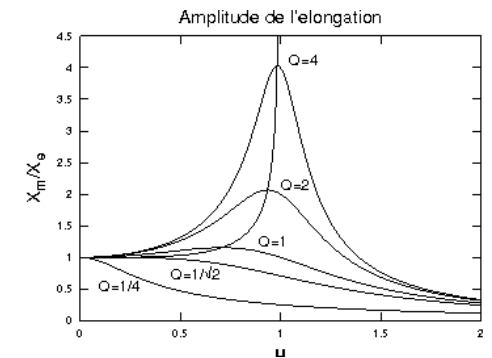
L'étude de la fonction sous le radical permet de conclure qu'il **existe une résonance en élongation à la pulsation**

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \quad \text{si} \quad Q > \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Il apparaît clairement que plus Q est grand, donc plus les frottements sont faibles à ω_0 fixée, plus la pulsation de résonance ω_r est proche de ω_0 . Par conséquent, lorsque $Q \gg 1$ on a $\omega_r \approx \omega_0$ et l'amplitude de l'élongation atteinte à la résonance s'écrit

$$X_{m_{max}} = X_e Q \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \approx X_e Q.$$

Ceci explique pourquoi **la résonance peut aboutir à la destruction du système, si le facteur de qualité est grand.**



d. Résonance en vitesse

De même on obtient l'amplitude de la vitesse

$$V_m = \frac{\omega_0 X_e Q}{\sqrt{1 + Q^2(u - \frac{1}{u})^2}},$$

d'où l'on tire qu'il y a toujours une résonance en vitesse, pour la pulsation propre

$$\omega_r = \omega_0 \quad \text{avec} \quad V_{m_{max}} = \omega_0 X_e Q.$$

On peut aussi définir une bande-passante $[\omega_1; \omega_2]$ de largeur $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ telle qu'à l'intérieur $V_m > \frac{V_{m_{max}}}{\sqrt{2}}$. On obtient que l'acuité de la résonance en vitesse est donnée par le facteur de qualité :

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}.$$

e. Etude énergétique

L'équation du mouvement ci-dessus peut être multipliée par \dot{x} puis intégrée pour retrouver le théorème de la puissance cinétique :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 \right] = f_e \dot{x} - h \dot{x}^2 = f_e v - h v^2.$$

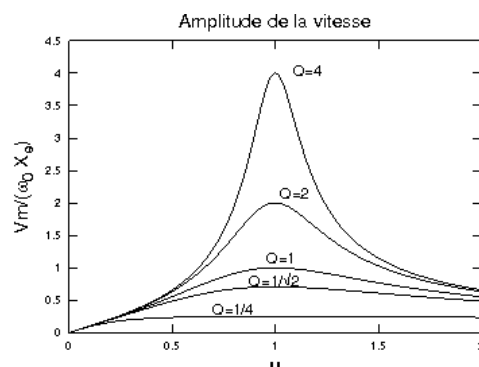
En régime sinusoïdal forcé établi toutes les grandeurs varient de façon périodiques, donc la valeur moyenne du membre de gauche ci-dessus est nulle. On obtient alors

$$\langle f_e v \rangle = \langle h v^2 \rangle,$$

ce qui exprime que toute la puissance apportée par l'opérateur extérieur via la force \vec{f}_e est dissipée par les frottements. Donc **l'énergie mécanique moyenne sur une période de l'oscillateur est constante.**

REMARQUE : Dans le cas particulier où l'excitation a lieu à la pulsation propre de l'oscillateur (résonance en vitesse), **l'énergie mécanique instantanée elle-même est constante**, comme montré pour l'oscillateur harmonique :

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 X_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2} k X_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2} k X_m^2 = \text{cte.}$$

**Rôle du facteur de qualité :**

Donnons une nouvelle interprétation énergétique du facteur de qualité. Soit E_{diss} l'énergie dissipée au cours d'une période T :

$$E_{\text{diss}} = \int_0^T h \dot{x}^2 dt = \frac{1}{2} h V_m^2 T = \frac{1}{2} h \omega^2 X_m^2 T$$

Si l'on se place à la résonance en vitesse, $\omega = \omega_0$, et donc

$$E_{\text{diss}} = \frac{1}{2} h \omega_0^2 X_m^2 T_0 = \frac{1}{2} k X_m^2 \frac{h}{m} \frac{2\pi}{\omega_0} = E_m \frac{2\pi}{Q}$$

d'où

$$\boxed{\frac{E_{\text{diss}}}{E_m} = \frac{2\pi}{Q}}.$$

Ainsi, **à la résonance en vitesse, le facteur de qualité exprime la proportion de l'énergie totale par rapport à l'énergie dissipée pendant une période.** Pour une énergie mécanique donnée, **meilleur est le facteur de qualité, plus faible est l'énergie dissipée par période**, et moins il faut en fournir pour entretenir l'oscillation.

III. Oscillateurs non linéaires

Nous allons montrer que contrairement à l'oscillateur harmonique, pour un oscillateur non linéaire le mouvement n'est **pas purement sinusoïdal**, et il n'y a **pas isochronisme** c'est-à-dire que **la période dépend en général de l'amplitude du mouvement**. Un tel oscillateur est aussi dit *anharmonique*. Nous commençons par un calcul général de la période pour un système conservatif quelconque (à un degré de liberté), puis nous étudions le cas particulier du pendule simple.

III.1. Calcul de la période des oscillations dans le cas général

Le principe consiste relier un intervalle de temps au déplacement associé par

$$dt = \frac{dq}{\dot{q}}$$

L'équation de conservation de l'énergie mécanique permet d'exprimer \dot{q} en fonction de q et donc de **séparer les variables** t et q :

$$E_m = \frac{1}{2}I(q)\dot{q}^2 + E_p(q) \quad \text{d'où} \quad \dot{q} = \frac{dq}{dt} = \pm \sqrt{2 \frac{E_m - E_p(q)}{I(q)}}$$

En choisissant par exemple la demi-période telle que $\dot{q} \geq 0$, où q varie de son minimum $q_m < 0$ (à t_0) à son maximum $q_M > 0$ (à $t_0 + \frac{T}{2}$), et en notant que $E_m = E_p(q_M)$ (position extrême donc vitesse nulle), on obtient en intégrant :

$$\frac{T}{2} = \int_{t_0}^{t_0 + \frac{T}{2}} dt = \int_{q_m}^{q_M} \frac{dq}{\dot{q}} = \int_{q_m}^{q_M} \sqrt{\frac{I(q)}{2(E_p(q_M) - E_p(q))}} dq$$

Si le puits de potentiel est symétrique par rapport à la position d'équilibre, on a $q_m = -q_M$ et donc

$$\frac{T}{4} = \int_0^{q_M} \sqrt{\frac{I(q)}{2(E_p(q_M) - E_p(q))}} dq$$

On obtient donc que **dans le cas général, la période du mouvement d'un oscillateur anharmonique dépend de son amplitude**. En développant $E_p(q)$ à l'ordre 2 au voisinage de l'équilibre, on peut retrouver que $T = T_0$ pour un potentiel harmonique, c'est-à-dire que les oscillations sont isochrones : elles ne dépendent plus de l'amplitude du mouvement. De façon générale on peut

aussi développer $T(q_M)$ en fonction de l'amplitude q_M , pour trouver les premiers écarts au comportement harmonique, comme ci-dessous pour le pendule simple. On trouvera alors :

$$T = T_0(1 + \beta q_M^2 + \gamma q_M^4 + \dots)$$

les termes impairs étant nuls car la fonction $T(q_M)$ est paire. En particulier à l'ordre 2, le signe de β dépend du signe de l'écart du puits de potentiel par rapport au puits harmonique : $\beta > 0$ (période plus grande que la période harmonique) si le puits de potentiel est plus évasé (la force de rappel est moins forte, ou la vitesse décroît moins vite en s'éloignant de l'équilibre), et inversement $\beta < 0$ (période plus courte) si le puits de potentiel est moins évasé (la force de rappel est plus forte).

III.2. L'exemple du pendule simple

a. Conséquences d'une force de rappel non linéaire

Nous étudions le pendule simple constitué d'une masse m au bout d'une tige rigide sans masse de longueur ℓ (ce qui évite le problème de l'annulation possible de la tension du fil pour des grands angles). Il est décrit par l'équation du mouvement

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

Le $\sin \theta$ provient de la composante orthoradiale du poids. Pour de petits angles nous avons $\sin \theta \approx \theta$. Mais pour des angles un peu plus grands il est nécessaire de prendre en compte les termes suivants du développement limité. A l'ordre 3 (ou 4) on obtient donc l'équation approximative :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \left(\theta - \frac{\theta^3}{6} \right) = 0$$

Est-il possible de trouver une solution sinusoïdale de cette équation ? On pose $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t)$ et on l'y introduit, ce qui donne³

$$\left(-\omega^2 \theta_0 + \omega_0^2 \theta_0 - \omega_0^2 \frac{\theta_0^3}{8} \right) \sin(\omega t) + \omega_0^2 \frac{\theta_0^3}{24} \sin(3\omega t) = 0$$

On observe que le terme non linéaire a fait apparaître une harmonique d'ordre supérieur (3), d'amplitude plus faible que le mode fondamental en ω . On tombe donc sur une absurdité puisque les fonctions $\sin(\omega t)$ et $\sin(3\omega t)$ ne sont pas colinéaires. Si l'on essaie maintenant de chercher une solution de la forme

3. après développement de $\sin^3 u = \frac{3}{4} \sin(\omega t) - \frac{1}{4} \sin(3\omega t)$,

$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t) + \theta_1 \sin(3\omega t)$, on va obtenir après développement de nouvelles harmoniques d'ordre 5, 7, et 9 (d'amplitudes plus faibles encore)... Finalement, la solution s'écrit donc comme **une superposition infinie d'harmoniques**⁴ **d'amplitude de plus en plus petites, créées par le terme non linéaire** :

$$\theta(t) = \theta_0 [\sin(\omega t) + \varepsilon_1 \sin(3\omega t) + \varepsilon_2 \sin(5\omega t) + \dots] \quad \text{avec} \quad 1 \gg |\varepsilon_1| \gg |\varepsilon_2| \dots$$

Si l'on introduit cette expression dans l'équation du mouvement à l'ordre 3 ci-dessus, par annulation des coefficients devant les $\sin((2p+1)\omega t)$ on obtiendra des relations donnant les amplitudes successives des différentes harmoniques en fonction de la pulsation ω . Pour le mode fondamental on obtient donc

$$-\omega^2 + \omega_0^2 - \omega_0^2 \frac{\theta_0^2}{8} = 0 \quad \text{d'où} \quad \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\theta_0^2}{8}}$$

La période des oscillations dépend donc de l'amplitude du mouvement dans le pendule anharmonique. Si cette amplitude est encore suffisamment petite, on peut la développer et obtenir :

$$T = T_0 \left(1 - \frac{\theta_0^2}{8}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx T_0 \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right) > T_0$$

Il apparaît que **la période du pendule anharmonique est supérieure à celle du pendule harmonique**. Ceci était prévisible, car en assimilant $\sin \theta$ à θ , nous avons sur-estimé l'intensité de la force de rappel due à la pesanteur. On peut aussi voir cela d'un point de vue énergétique : le puits de potentiel est en réalité plus évasé qu'un puits parabolique⁵.

b. Portrait de phase

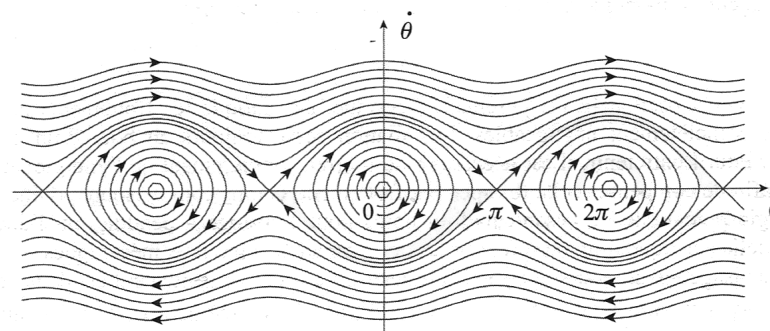
Les trajectoires dans le plan de phase sont données pour chaque valeur de E_m par l'équation :

$$E_m = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta = \text{constante}.$$

Il existe 2 catégories de trajectoires : les courbes fermées (oscillations autour de $\theta = 0 [2\pi]$) et les courbes non fermées (révolutions successives du pendule).

4. On peut montrer que le fait que seules les harmoniques impaires apparaissent est dû à la symétrie du puits de potentiel, et donc du mouvement par rapport à la position d'équilibre.

5. car $E_p = -mgl \cos \theta$ et $-\cos \theta \approx -1 + \frac{\theta^2}{2} - \frac{\theta^4}{4!} < -1 + \frac{\theta^2}{2}$.



Lorsque E_m est petit, le mouvement est harmonique et les trajectoires elliptiques. Quand E_m augmente, le mouvement devient anharmonique, les ellipses se déforment le long de l'axe des θ car l'amplitude est plus grande que dans le cas harmonique. Pour E_m encore plus grand le pendule effectue des révolutions. Plus E_m est grand plus les variations relatives d'énergie cinétique, et donc de vitesse, sont faibles.

III.3. Oscillateurs auto-entretenus

Les frottements n'étant en réalité jamais nuls, un oscillateur auto-entretenu doit puiser son énergie quelque part. Nous avons vu que dans le cas linéaire, l'oscillateur amorti vérifie l'équation

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Si l'on arrive au contraire à obtenir un coefficient Q **négatif**, le système voit **son énergie augmenter, les oscillations s'amplifier**. Au bout d'un certain temps des **effets non linéaires**, qui ne sont plus négligeables, se font ressentir en limitant l'amplitude à une valeur stable. **Un oscillateur auto-entretenu n'est donc jamais purement sinusoïdal**⁶. Son spectre contient plusieurs harmoniques. C'est le cas par exemple de l'oscillateur de *Van der Pol* :

$$\ddot{x} + (\alpha x^2 - \beta) \dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \text{avec} \quad \alpha > 0 \quad \text{et} \quad \beta > 0.$$

Pour des oscillations faibles, $(\alpha x^2 - \beta) < 0$ donc le système gagne de l'énergie et l'amplitude croît. Au contraire il perd de l'énergie si l'amplitude devient trop grande car alors $(\alpha x^2 - \beta) > 0$. Le système se stabilise donc dans des oscillations non linéaires d'amplitude finie.

6. Vrai aussi en électrocinétique bien sûr.