Mesures et incertitudes

Application aux travaux pratiques

Table des matières

I Mesure, erreur et incertitude : approche théorique **2**
1 Définitions . . . 2
2 Erreur aléatoire . . . 2
3 Erreur systématique . . . 2
4 Fidélité et justesse . . . 3
5 Schéma récapitulatif . . . 3
6 Notion d'incertitude de mesure . . . 3

II Estimation des incertitudes expérimentales **4**
1 Évaluation de type A de l'incertitude-type . . . 4
2 Évaluation de type B de l'incertitude-type . . . 4
3 Incertitude-type composée . . . 5
4 Incertitude-type élargie et intervalle de confiance . . . 6

III Propagation des erreurs **6**
1 Cas monodimensionnel . . . 6
2 Cas multidimensionnel . . . 7

IV Présentation des résultats numériques **8**
1 Chiffres significatifs . . . 8
2 Présentation d'un résultat de mesure . . . 8

V Analyse graphique **9**
1 Généralités . . . 9
2 Régressions linéaires . . . 9

VI Résumé pratique pour les TP **11**

ANNEXE : Caractéristiques générales d'un appareil de mesure **11**

Introduction

Lord Kelvin écrivait « il n'y a de science que du mesurable... ». Mesurer des grandeurs identifiées est une activité fondamentale dans les laboratoires de recherche scientifique et dans l'industrie. Toute validation théorique d'un phénomène (physique, biologique, chimique, etc.) passe par la mesure fiable de ses effets. C'est aussi fondamental dans de nombreuses activités quotidiennes [1].

Les capteurs et instruments ont pour vocation d'aider à traduire la valeur d'une grandeur en une donnée numérique, parfois très simplifiée, qui pourra être utilisée afin de tirer des conclusions ou prendre des décisions, c'est-à-dire en une donnée numérique digne de confiance. Les méthodes et conventions qui régissent la définition, l'évaluation et l'expression des résultats de mesure et les propriétés des instruments sont partie intégrante du langage à vocation universelle de la **métrologie**, science de la mesure. C'est en particulier grâce à une estimation convenable de l'incertitude attachée à un résultat que ce dernier pourra, paradoxalement, inspirer une confiance maîtrisée, et être reconnu sans équivoque par plusieurs partenaires. Comment, en effet, comparer entre eux des résultats de façon fiable, ou confronter une donnée à une tolérance, en l'absence de caractérisation de l'incertitude ?

Mesurer une grandeur, c'est donc d'une part comparer une grandeur inconnue à une grandeur prise comme référence (unité) à l'aide d'une chaîne instrumentale, et d'autre part estimer une incertitude attachée à cette mesure, afin d'en qualifier la qualité.

1. C'est par la métrologie qu'on peut assurer que les volumes des marchandises qui font l'objet de transactions commerciales sont mesurés de façon correcte, comme le pétrole brut, le gaz naturel, l'eau, dans une vaste étendue de mesure. C'est grâce à des mesures exactes qu'on peut fabriquer de façon efficace les composants d'objets aussi variés que les lecteurs de disques numériques, des véhicules de performances élevées, pour lesquels la fiabilité dépend de tolérances de fabrication contraignantes. De même les systèmes de télécommunications ne fonctionnent avec des rythmes de transmission élevés que grâce à la coordination des échelles de temps, au travers de l'*UTC* (*Temps Universel Coordonné*), l'échelle internationale construite à partir des horloges atomiques. Cette échelle est également utilisée par les systèmes de navigation à couverture globale, tel le *GPS* ou le système *Galileo*.

La pratique de la médecine fait appel à des mesures délicates, tant pour les diagnostics qu'en thérapie, qu'il s'agisse d'analyses chimiques, de mesure des doses de rayonnement, d'interprétation d'images. En agriculture, le suivi des produits alimentaires et la protection de l'environnement nécessitent des mesures, qui permettent le contrôle ou l'anticipation de dispositions réglementaires. Plus généralement, l'expertise judiciaire s'appuie sur des résultats de mesure, du simple contrôle de vitesse, de poids par essieu de camion, d'alcoolémie ou d'imprégnation de stupéfiants, aux investigations les plus poussées en matière, par exemple, de résistance des matériaux. Enfin, dans le sport la comparaison des performances effectuées en des moments, dans des lieux et avec des équipements différents, impose l'exactitude des instruments de mesure.

I. Mesure, erreur et incertitude : approche théorique

I.1. Définitions

- La grandeur que l'on veut mesurer est appelée le **mesurande**.
- On appelle **mesurage** (ou plus couramment **mesure**) l'ensemble des opérations permettant de déterminer expérimentalement une ou plusieurs valeurs que l'on peut raisonnablement attribuer à une grandeur.
  Exemple : Mesurage du mesurande "résistance R" d'un dipôle passif linéaire à l'aide d'un ohmmètre.
- La **valeur vraie** ($\mathbf{M_0}$) du mesurande est la valeur que l'on obtiendrait si le mesurage était parfait. **Toute mesure étant par essence imparfaite, elle est entachée d'erreur, et la valeur vraie est toujours inconnue.**
- Le **résultat du mesurage** (**résultat de mesure**) est un ensemble de valeurs attribuées à un mesurande complété par toute information pertinente disponible. Une expression complète du résultat du mesurage comprend des informations sur l'incertitude de mesure qui permet d'indiquer quel est l'intervalle des valeurs probables du mesurande. En pratique, l'écriture du résultat du mesurage M doit intégrer, en plus de la valeur de la grandeur $\mathbf{m}$, la valeur de l'*incertitude*[2] $\mathbf{\Delta M}$, le *niveau de confiance* et s'écrire avec les unités appropriées :

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} \pm \mathbf{\Delta M} \quad , \textbf{unité}, \textbf{niveau de confiance}.$$

- Un mesurage n'étant jamais parfait, il y a toujours une **erreur de mesure**, qui de même que la valeur vraie est **inconnue** :

$$\delta\mathbf{M} = \mathbf{m} - \mathbf{M_0}$$

I.2. Erreur aléatoire

Les **conditions de répétabilité** sont remplies lorsque le même opérateur ou le même programme effectue N mesures exactement dans les mêmes conditions. Si on effectue N mesures $\mathbf{m_i}$ dans des conditions de répétabilité, le meilleur estimateur de la valeur du mesurande est la moyenne arithmétique des N mesures :

$$\overline{\mathbf{m}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{m_i}$$

2. La notation internationale officielle pour l'incertitude est maintenant $u(M)$ (*uncertainty*) et non ΔM. Toutefois on gardera ici cette dernière notation largement usitée, pour son lien sémantique avec l'erreur de mesure notée δM, et la notion statistique d'écart-type (cf plus loin).

Mais une mesure $\mathbf{m_i}$ quelconque parmi les N est en général différente de $\overline{\mathbf{m}}$. On appelle alors **erreur aléatoire** la différence

$$\delta\mathbf{M_a} = \mathbf{m_i} - \overline{\mathbf{m}}$$

En toute rigueur, $\overline{\mathbf{m}}$ est la moyenne qui résulterait d'un nombre infini de mesurages du même mesurande, effectués dans les conditions de répétabilité ($\overline{\mathbf{m}}_\infty$, cf Fig. 2). Comme on ne peut faire qu'un nombre fini de mesures, il est seulement possible de déterminer une estimation de l'erreur aléatoire.
Lors de chaque mesure, l'erreur aléatoire peut prendre n'importe quelle valeur entre $\mathbf{m}_{\min} - \overline{\mathbf{m}}$ et $\mathbf{m}_{\max} - \overline{\mathbf{m}}$.

Les erreurs aléatoires peuvent avoir deux origines :

- <u>Observationnelle :</u>
  - Lecture, ou appréciation de la dernière division sur un vernier, choix du dernier digit sur un appareil numérique.
  - Limite de résolution (largeur d'une fente de spectromètre, effet de la diffraction, processus de numérisation).
  - Limitation intrinsèque de la précision de l'appareil de mesure.
- <u>Environnementale :</u>
  - Fluctuation de la résistance des contacts électriques, variation des tensions d'alimentation d'AO, parasites extérieurs.
  - Vibration mécanique.

I.3. Erreur systématique

Par définition, l'**erreur systématique** est

$$\delta\mathbf{M_s} = \overline{\mathbf{m}} - \mathbf{M_0}$$

En toute rigueur, on devrait aussi utiliser $\overline{\mathbf{m}}_\infty$, mais il est impossible de réaliser une infinité de mesures. De plus la valeur vraie $\mathbf{M_0}$ du mesurande est toujours inconnue. Donc l'erreur systématique $\delta\mathbf{M_s}$ ne peut pas être connue complètement, on peut seulement en déterminer une estimation.
Lors d'une mesure, l'erreur systématique prend la même valeur (inconnue) lors de chaque mesure[3].

Les erreurs systématiques sont les plus dangereuses car elles se font toujours dans le même sens. Elles ont diverses origines :

3. Ceci est vrai à condition de remplacer $\overline{\mathbf{m}}$ par $\overline{\mathbf{m}}_\infty$ dans la définition. En toute rigueur $\overline{\mathbf{m}}$ varie à chaque ajoût d'une nouvelle valeur $\mathbf{m_i}$ dans la moyenne, mais ses variations relatives deviennent faibles devant celles des $\mathbf{m_i}$ pour N grand.

- Instrumentale : appareil défectueux ou sa mauvaise utilisation (zéro mal réglé, mauvais étalonnage, défaut de linéarité, bande passante...).
- Environementale : montage électronique erroné, ou faux contacts systématiques, fuite thermique, variation de température.
- Observationnelle : parallaxe.
- Théorique : Existence d'un phénomène négligé (présence de frottements solides) ou inconnu.

Important : Avant toute opération de mesure il est impératif de s'efforcer d'éliminer toutes les erreurs systématiques. Par exemple en testant la mesure sur des cas connus (cf étalonnage).

Ce n'est toutefois pas toujours possible en raison, par exemple, du principe même de la mesure (ex : méthode de longue ou courte dérivation pour mesurer tension et intensité) ou bien lorsqu'un paramètre change à notre insu.

I.4. Fidélité et justesse

Si l'on reprend les définitions et les notations précédentes, on obtient :

$$\delta\mathbf{M} = \mathbf{m} - \mathbf{M_0} = \mathbf{m} - \overline{\mathbf{m}} + \overline{\mathbf{m}} - \mathbf{M_0} = \delta\mathbf{M_a} + \delta\mathbf{M_s}$$

Une erreur de mesure $\delta\mathbf{M}$ a donc, en général, deux composantes : une erreur aléatoire $\delta\mathbf{M_a}$ et une erreur systématique $\delta\mathbf{M_s}$.

Définitions :

- **Justesse** d'un instrument de mesure : aptitude à donner des indications exemptes d'**erreur systématique**.
  L'estimation de l'erreur systématique est appelée *biais de mesure* ou *erreur de justesse.*
- **Fidélité** d'un instrument de mesure : aptitude à donner des indications très voisines lors de l'application répétée du même mesurande dans les mêmes conditions. Plus les mesures sont **dispersées**, moins l'instrument est fidèle.

Pour illustration, on présente sur les cibles ci-dessous le résultats de différentes séries de tirs. La valeur vraie du mesurande est au centre.

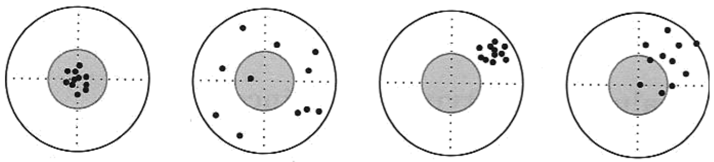

Figure 1 : De gauche à droite les cibles correspondent respectivement à un instrument de mesure i) fidèle et juste, ii) juste mais pas fidèle, iii) fidèle mais pas juste, et iv) ni juste ni fidèle.

I.5. Schéma récapitulatif

$$\boxed{p(\mathbf{m_i}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(\mathbf{m_i}-\overline{\mathbf{m}}_\infty)^2}{2\sigma^2}}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(\mathbf{m})\mathrm{d}\mathbf{m} = 1$$

$$\int_{\overline{\mathbf{m}}_\infty-2\sigma}^{\overline{\mathbf{m}}_\infty+2\sigma} p(\mathbf{m})\mathrm{d}\mathbf{m} \approx 0.95$$

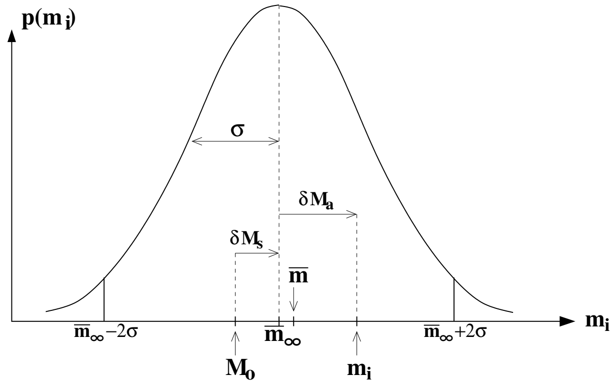

Figure 2 : Les mesures successives $\mathbf{m_i}$ se distribuent suivant une loi de probabilité qui est souvent gaussienne, de moyenne $\overline{\mathbf{m}}_\infty$ et d'écart-type σ. La moyenne arithmétique $\overline{\mathbf{m}}$ des N premières mesures est aussi une variable aléatoire, de limite $\overline{\mathbf{m}}_\infty$ pour N grand, et d'écart-type $\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$. S'il existe une erreur systématique, la valeur vraie $\mathbf{M_0}$ ne coïncide pas avec $\overline{\mathbf{m}}_\infty$.

Ainsi, même si l'erreur systématique a été éliminée, l'erreur aléatoire ne peut être connue a priori, et on ne peut réaliser un nombre infini de mesures. Donc dans l'absolu il est impossible de connaître la valeur vraie $\mathbf{M_0}$ recherchée. Le concept d'incertitude de mesure permet d'apporter une réponse à la question « Quelle est la valeur vraie $\mathbf{M_0}$? » .

I.6. Notion d'incertitude de mesure

- o L'**incertitude de mesure $\Delta\mathbf{M}$** est un paramètre, associé au résultat du mesurage, qui **caractérise la dispersion** des valeurs qui pourraient raisonnablement être attribuées au mesurande **du fait des erreurs aléatoires**.
- o Ce paramètre peut être, par exemple, la demi-largeur d'un intervalle de niveau de confiance déterminé.
- o Le résultat d'une mesure n'est jamais une valeur : il est toujours donné sous la forme d'un **intervalle des valeurs probables** du mesurande $\mathbf{M} = \mathbf{m} \pm \Delta\mathbf{M}$ associé à un **niveau de confiance**.

- o L'évaluation des incertitudes par des méthodes statistiques est dite de **type A**. Quand la détermination statistique n'est pas possible, on dit que l'évaluation est de **type B**. C'est le cas d'une mesure unique **m** réalisée avec un appareil de *classe* connue.
- o On appelle **incertitude-type** une incertitude de mesure exprimée sous la forme d'un **écart-type**.
- o Lorsque les sources de variabilité de la mesure sont multiples, on estime l'incertitude-type pour chacune d'entre elles et l'on fait un bilan global pour construire une **incertitude-type composée**, qui peut mélanger des évaluations de type A et de type B.
- o On appelle **incertitude relative** ou **précision** sur le résultat du mesurage la quantité $\frac{\mathbf{\Delta M}}{|\mathbf{m}|}$, souvent exprimée en %. Plus ce rapport est petit, plus le mesurage est précis.

II. Estimation des incertitudes expérimentales

II.1. Évaluation de type A de l'incertitude-type

L'évaluation de type A de l'incertitude-type est réalisée par l'analyse statistique de séries d'observations [4]. On suppose ici que **le biais de mesure est nul**, autrement dit que **les erreurs systématiques ont été éliminées du processus de mesure**, c'est-à-dire :

$$\overline{\mathbf{m}}_\infty = \lim_{\mathbf{N}\to\infty} \overline{\mathbf{m}} = \mathbf{M_0}$$

Si on suppose les N observations $\mathbf{m_i}$ **indépendantes** :

- La meilleure estimation du résultat de la mesure est donnée par la moyenne arithmétique

$$\overline{\mathbf{m}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{m_i}$$

- L'**écart-type** est défini par

$$\sigma = \lim_{N\to\infty}\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\mathbf{m_i}-\mathbf{M_0})^2}$$

4. cf programme de Maths de Sup (Statistiques) en fin d'année.

- Cependant, non seulement on n'a accès qu'à un nombre fini de mesures, mais surtout $\mathbf{M_0}$ ne peut être connue en pratique, donc on ne peut qu'avoir une estimation de l'écart-type. L'**écart-type expérimental** ou **empirique** a pour expression [5]

$$\sigma_{N-1} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(\mathbf{m_i}-\overline{\mathbf{m}})^2}$$

- L'**incertitude-type $\mathbf{\Delta_A M}$** est définie comme étant **l'écart-type sur la valeur moyenne $\overline{\mathbf{m}}$**. Le meilleur estimateur de cet écart-type est alors

$$\boxed{\mathbf{\Delta_A M} = \frac{\sigma_{N-1}}{\sqrt{N}}}$$

En effet, **la moyenne arithmétique $\overline{\mathbf{m}}$ est elle-même une variable aléatoire, dont la distribution se rapproche d'une gaussienne pour N grand** [6]. On peut montrer que **cette distribution est d'autant plus étroite que N est grand, car son écart-type est $\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$**. Ceci justifie l'emploi de la valeur moyenne $\overline{\mathbf{m}}$ pour estimer la valeur de la mesure.

II.2. Évaluation de type B de l'incertitude-type

L'évaluation de type B est effectuée par des moyens autres que l'analyse statistique de série de mesures, de façon générale par un jugement scientifique fondé sur toutes les informations disponibles au sujet de la variabilité possible de la grandeur d'entrée. L'ensemble d'informations accumulées peut comprendre :

- des mesures antérieures ;
- l'expérience ou la connaissance générale du comportement et des propriétés des matériaux et des instruments utilisés ;
- les spécifications du fabricant ;
- les données fournies par les certificats d'étalonnages ou autres certificats ;
- l'incertitude assignée à des valeurs de référence provenant d'ouvrages ou de manuels.

5. On serait tenter d'utiliser $\sigma_N = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\mathbf{m_i}-\overline{\mathbf{m}})^2}$, mais la variable aléatoire σ_N^2 n'a pas pour espérance σ^2. On dit qu'elle est biaisée. On utilise donc l'**écart-type corrigé** σ_{N-1}, dont le carré est sans biais.
6. C'est le *théorème de la limite centrale*, qui est valable même si la variable aléatoire $\mathbf{m_i}$ n'a pas une distribution gaussienne.

En pratique pour ce qui est des TPs, nous nous baserons essentiellement sur les données du constructeur de l'appareil. A moins qu'elles ne fournissent directement l'incertitude-type (très rare), les données constructeur se traduisent d'une façon ou d'une autre par la donnée d'un **intervalle de valeurs possibles de demi-largeur** Δ_c.
Enfin, en l'absence de toute information, il y a toujours la possibilité de déterminer de façon plus ou moins arbitraire un intervalle de **valeurs possibles** $[\mathbf{m}_{\min}, \mathbf{m}_{\max}]$. En particulier, pour un appareil de mesure analogique (appareil à cadran, lecture d'un réglet...) il existe toujours potentiellement une **erreur de lecture**, qui correspond à un intervalle de la longueur de la plus petite division (résolution). Plus généralement, certaines mesures autorisent une certaine plage de valeurs possibles par le procédé de détection lui-même (ex : incertitude liée au pouvoir de résolution de l'oeil dans le positionnement d'une lentille pour la mise-au-point).

On est donc généralement ramené à évaluer un écart-type pour une variable aléatoire dont on ne connaît que l'intervalle des valeurs possibles $[\mathbf{m}_{\min}, \mathbf{m}_{\max}]$, centré sur la moyenne $\mu = \frac{1}{2}(\mathbf{m}_{\min} + \mathbf{m}_{\max})$ et de largeur $2\Delta_c = \mathbf{m}_{\max} - \mathbf{m}_{\min}$. En l'absence d'autres informations (notamment statistiques), l'incertitude-type s'écrit alors

$$\boxed{\mathbf{\Delta_B M} = \frac{\Delta_c}{\sqrt{3}} = \frac{|\mathbf{m}_{\max} - \mathbf{m}_{\min}|}{\sqrt{12}}}$$

Démonstration :
On suppose que la distribution de probabilité $p(\mathbf{m})$ est uniforme sur cet intervalle (cf Fig. 3). Pour satisfaire la normalisation

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(\mathbf{m}) \mathrm{d}\mathbf{m} = 1$$

on doit avoir $p(\mathbf{m}) = \frac{1}{2\Delta_c}$ dans le domaine possible et $p(\mathbf{m}) = 0$ en dehors.

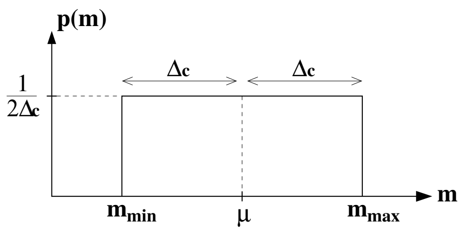

Figure 3

L'incertitude est alors évaluée en calculant l'écart-type d'une telle distribution continue :

$$\sigma = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} p(\mathbf{m})\,(\mathbf{m}-\mu)^2\,\mathrm{d}\mathbf{m}} = \sqrt{\frac{1}{2\Delta_c}\int_{\mu-\Delta_c}^{\mu+\Delta_c} (\mathbf{m}-\mu)^2\,\mathrm{d}\mathbf{m}} = \frac{\Delta_c}{\sqrt{3}} \quad \square$$

Remarque : Le facteur $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ($\approx 0,6$) qui apparaît dans la relation ci-dessus, n'est pas essentiel. Lorsque l'on cherchera évaluer l'incertitude, on pourra l'omettre dans une première approche.

Exemple : *Les quatre anneaux de couleur caractérisant la résistance sont Brun, Noir, Noir, Or. La résistance est donc égale à* $R = 10\,\Omega \pm 5\%$. *L'incertitude-type associée est égale à* $\Delta R = \frac{10\times 0,05}{\sqrt{3}} \approx 0,29\,\Omega$.

Exemple : *Thermomètre : « Range -200 to +700° C, Temperature resolution below 700° C : 0,01° C. »*
On considère que l'indication constructeur est l'incertitude maximale liée à la résolution. L'incertitude due à la résolution associée à une mesure de 18,545° C est : $\Delta T = \frac{0,01}{\sqrt{3}} = 0,0056°$ *C.*

Exemple : *Boîte à décades : « Range : 1 Ω to 1,11 MΩ, number of decades : 5, full scale accuracy 0,1%.»*
On considère que l'indication du constructeur est l'incertitude maximale. L'incertitude de type B associée à une boîte réglée sur 10 kΩ est alors : $\Delta R = \frac{10000\times 0,001}{\sqrt{3}} = 5,8\,\Omega$.

Exemple : *On cherche à mesurer une tension de 0,9 V à l'aide d'un voltmètre de classe 2, réglé sur le calibre 100 V. Le résultat lu est 3 V et reste constant. Le calibre est-il bien choisi ?*
Un voltmètre de classe 2 sur calibre 100 V induit une erreur absolue de $0,02 \times 100 = 2$ *V. L'incertitude type est alors* $\Delta u = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1,1$ *V.*
Sur la mesure d'une tension de 3 V, l'incertitude relative est alors de $1,1/3 = 38\%$. *Le calibre est mal choisi car la sensibilité du voltmètre n'est pas suffisante pour mesurer 0,9 V.*

II.3. Incertitude-type composée

Les deux types d'incertitude $\mathbf{\Delta_A M}$ et $\mathbf{\Delta_B M}$ correspondent en fait à deux approches différentes et complémentaires du problème d'estimation de $\mathbf{\Delta M}$. Lorsqu'elles sont d'amplitudes comparables, on calcule l'**incertitude composée** par

$$\boxed{\mathbf{\Delta M} = \sqrt{\mathbf{\Delta_A M}^2 + \mathbf{\Delta_B M}^2}}$$

Cette formule de composition repose sur le fait que **la variance d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes est la somme des variances de chacune**.

IMPORTANT : L'incertitude de type A est liée à la statistique des mesures. Si l'on n'effectue qu'une seule mesure (cas fréquent), cette incertitude ne peut plus être évaluée. Il ne reste plus alors que les incertitudes de type B, qui elles doivent toujours être prises en compte [a].

a. Cela ne signifie pas qu'on réduit l'incertitude en ne faisant qu'une seule mesure, car il faut alors évaluer celle de type B différemment.

II.4. Incertitude-type élargie et intervalle de confiance

L'**incertitude-type élargie $\mathbf{\Delta_e M}$** (qui constituera l'incertitude de la mesure $\mathbf{\Delta M}$) est une grandeur définissant un intervalle autour du résultat du mesurage tel qu'il comprenne une fraction élevée de la distribution de valeurs pouvant être attribuées au mesurande. Elle est associée à un **niveau de confiance**.
Elle s'exprime sous la forme $\mathbf{\Delta_e M} = k\,\mathbf{\Delta_X M}$ où $\mathbf{\Delta_X M}$ est l'incertitude-type déterminée précédemment ($X = A$ ou B, ou composée) et k le facteur d'élargissement.

Dans la majorité des cas, on conduit une estimation de type B et la forme de la loi de distribution est souvent assimilée à une gaussienne.
Si l'on garde simplement l'incertitude-type ($k = 1$), alors le niveau de confiance est seulement de 68,2% (cf Fig. 4 ci-contre).
On peut montrer que le coefficient à retenir pour un niveau de confiance de l'ordre de 95% est $k = 2$.

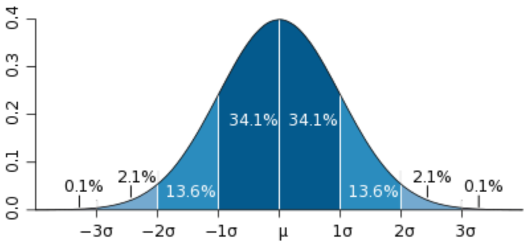

Figure 4 : Proportion des aires correspondant à des intervalles donnés.

III. Propagation des erreurs et incertitudes

Dans la section précédente, on a présenté comment évaluer une incertitude sur la mesure *directe* d'une grandeur. Lorsqu'on accède à la grandeur mesurée via un calcul à partir d'autres grandeurs mesurées de façon directe, on dit que la mesure est *indirecte*.
Exemple : Quelle est l'incertitude sur la résistance $R = \frac{u}{i}$ si l'on mesure tension et courant avec des incertitudes connues Δu et Δi ?
Il importe alors de savoir comment se propagent les erreurs dans la relation mathématique utilisée, afin de pouvoir évaluer l'incertitude finale.

III.1. Cas monodimensionnel

Supposons que l'on mesure la grandeur x avec une incertitude Δx, pour en déduire la grandeur y par la relation $y = f(x)$. On note x_0 et y_0 les valeurs vraies des mesurandes x et y. On fait une erreur $\delta x = x - x_0$ sur x qui se répercute sous la forme d'une erreur $\delta y = y - y_0$ sur y.
Par définition de la dérivée, on a

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x_0) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = f'(x_0)$$

On en déduit que **si les erreurs sont suffisamment petites, on peut remplacer la relation différentielle** [7]

$$\boxed{\mathrm{d}y = \mathrm{d}f = f'(x_0)\,\mathrm{d}x \quad \textbf{par} \quad \delta y = f'(x_0)\,\delta x}.$$

Incertitude :
L'incertitude-type étant définie comme un écart-type, la relation de proportionnalité qui existe entre δy et δx est vérifiée aussi par les incertitudes, à ceci près que ces dernières sont définies positives :

$$\Delta y = |f'(x_0)|\,\Delta x$$

Enfin, gardons à l'esprit qu'en pratique la valeur vraie x_0 est inconnue, donc à la place on évalue la dérivée au point de mesure x qui a priori est très proche [8] de x_0 :

$$\boxed{\Delta y = |f'(x)|\,\Delta x}$$

Incertitude relative (ou précision) :
On obtient

$$\frac{\Delta y}{|y|} = \left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right|\,\Delta x = \left|\frac{\mathrm{d}\ln|f(x)|}{\mathrm{d}x}\right|\,\Delta x$$

On remarque donc qu'on peut obtenir directement l'incertitude relative sans passer par l'incertitude elle-même, en calculant directement la *dérivée logarithmique* de f, c'est-à-dire en différenciant directement la fonction $h(x) = \ln|f(x)|$.

CONCLUSION : Dans le cas mono-dimensionnel, la propagation des incertitudes s'obtient en différenciant la fonction au point de mesure, puis en prenant la valeur absolue et en remplaçant les différentielles par des incertitudes ($\mathrm{d} \to \Delta$). L'incertitude relative est obtenue de la même façon mais en prenant la différentielle logarithmique.

7. On appelle "différentielle de f en x_0" la quantité $\mathrm{d}f = f'(x_0)\,\mathrm{d}x$.
8. Comme les incertitudes sont positives, on peut directement faire le raisonnement en prenant x comme point de référence au lieu de x_0 : $(y_0 - y) = f'(x)(x_0 - x)$, d'où $\Delta y = |f'(x)|\,\Delta x$.

III.2. Cas multidimensionnel

Dans le cas général, une mesure indirecte dépend de plusieurs grandeurs mesurées de façon directe et auxquelles sont associées des incertitudes. Comme dans le cas mono-dimensionnel, la propagation des erreurs est obtenue par le calcul différentiel, mais généralisé à plusieurs dimensions.
Considérons par exemple un cas bi-dimensionnel [9] ; le résultat sera généralisable à un nombre quelconque de variables. La grandeur z est reliée aux grandeurs x et y, par $z = f(x,y)$. Les mesures directes de x et y sont affectées des incertitudes Δx et Δy.

Dérivées partielles :
Pour la différenciation, la fonction $z = f(x,y)$ peut être visualisée comme une surface dans l'espace à trois dimensions : la hauteur z varie en fonction de la position horizontale (x,y). Lorsque l'on se déplace sur une courbe plane (cas précédent $y = f(x)$), il existe une unique pente $f'(x)$. Par contre lorsque l'on se déplace sur une surface, la pente dépend de la direction dans laquelle on marche. Pour exprimer cela, on calcule la pente dans les deux directions privilégiées des axes (Ox) et (Oy), c'est-à-dire en se déplaçant sur des sections planes de la surface par des plans $y = \text{cte}$ et $x = \text{cte}$. Ces pentes sont appelées *dérivées partielles selon x ou y*, et définies respectivement par

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(x+\varepsilon,y)-f(x,y)}{\varepsilon} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(x,y+\varepsilon)-f(x,y)}{\varepsilon}\,.$$

Elles permettent de calculer la variation élémentaire de f (ou différentielle de f en (x,y)), notée $\mathrm{d}f$, pour un déplacement élémentaire $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$ selon n'importe quelle direction en partant du point (x,y) :

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}y$$

En assimilant les erreurs aux différentielles, on obtient la loi de propagation des erreurs :

$$\boxed{\delta z = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\delta y}$$

Incertitude (sommation des variances) :
Il reste à savoir comment se combinent les écart-types des erreurs δx et δy. On peut montrer que si ces erreurs sont **aléatoires et indépendantes**, la variance [10] de leur somme est la somme de leurs variances. Ceci se traduit en termes d'incertitudes-types par

$$(\Delta z)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\,\Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\,\Delta y\right)^2$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\Delta z = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\,\Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\,\Delta y\right)^2}}$$

où les dérivées partielles sont évaluées au point de mesure (x,y).

Incertitude relative :
Comme dans le cas mono-dimensionnel, on peut obtenir l'incertitude relative en appliquant la même méthode sur la fonction $h(x,y) = \ln|f(x,y)|$, c'est-à-dire en calculant la différentielle logarithmique :

$$\boxed{\frac{\Delta z}{|z|} = \Delta \ln|f| = \sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial x}\,\Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\,\Delta y\right)^2}}$$

Les lois s'écrivant souvent sous forme de produits de puissances, le calcul de l'incertitude relative par la différentielle logarithmique est souvent plus simple que celui de l'incertitude simple. Dans ces conditions, il est plus facile d'obtenir l'incertitude en passant par l'incertitude relative.

Exemple : Pour la résistance $R = \frac{u}{i}$, on obtient $\Delta R = \sqrt{\left(\frac{\Delta u}{i}\right)^2 + \left(\frac{u\Delta i}{i^2}\right)^2}$, ce qui mène à $\frac{\Delta R}{R} = \sqrt{\left(\frac{\Delta u}{u}\right)^2 + \left(\frac{\Delta i}{i}\right)^2}$. Cette dernière relation s'obtient immédiatement en passant par la différentielle logarithmique. Inversement on peut l'utiliser pour calculer $\Delta R = R\sqrt{\left(\frac{\Delta u}{u}\right)^2 + \left(\frac{\Delta i}{i}\right)^2}$.

REMARQUE : Dans le cas où une source d'incertitude domine l'autre (les autres si dimension supérieure), les formules ci-dessus se ramènent aux formules trouvées dans le cas mono-dimensionnel. Ainsi, une évaluation rapide de l'ordre de grandeur de chaque contribution à la variance totale peut parfois simplifier le calcul d'incertitude.

9. Par exemple ci-dessus, la résistance R est une fonction de deux variables $R = f(u,i) = \frac{u}{i}$.

10. La variance est le carré de l'écart-type.

IV. Présentation des résultats numériques

IV.1. Chiffres significatifs

a) Définitions

- **Notation scientifique :** représentation d'un nombre décimal sous la forme $x = \pm a.10^n$.
  a est un nombre décimal (*significande* ou *mantisse*) à **un seul chiffre non nul à gauche de la virgule**, puis un nombre variable de décimales qui dépend de la précision. n est un entier.
- **Chiffres significatifs :** tous les chiffres d'un nombre qui ne peuvent être éliminés par le passage en notation scientifique. En particulier les zéros placés en dernier dans les décimales sont significatifs.

Exemple : $0,00274 = 2,74\,10^{-3}$ *comporte trois chiffres significatifs, alors que* $0,002740 = 2,740\,10^{-3}$ *en comporte quatre.*

Remarque : Si on ne dispose pas d'information concernant la manière dont les nombres sont obtenus, **le nombre de chiffres significatifs indique la précision**.
Exemple : Ecrire $m = 11,597$ *kg signifie que* $11,5975\,\mathrm{kg} > m > 11,5965\,\mathrm{kg}$.

Attention : lors de conversions d'unités ou de passage d'unités à leurs multiples ou sous multiples, il faut veiller à la conservation du nombre de chiffres significatifs.
Exemple : $m = 11,6\,\mathrm{kg} = 11,6\,10^3$ *g (3 chiffres significatifs) mais pas* 11600 *g (5 chiffres significatifs).*

b) Arrondis (au plus proche, ou arrondi arithmétique)

La méthode la plus courante consiste à :
- choisir le dernier chiffre à conserver,
- augmenter ce chiffre d'une unité si le chiffre suivant vaut au moins 5 ("arrondissage par excès"),
- conserver ce chiffre si le suivant est strictement inférieur à 5 ("arrondissage par défaut")

Exemple : $3,046 = 3,05$.

Arrondi en présence d'un logarithme ou d'une exponentielle :
La fonction logarithme apparaît beaucoup en Chimie (pH, pK, etc), mais aussi en physique (décibels...). Le comportement de la fonction $y = 10^x$, rapidement variable avec x, entraîne une règle adaptée :
Il y a autant de chiffres significatifs pour y que de chiffres significatifs après la virgule dans son logarithme $x = \log_{10} y$.
Exemple : On part d'un pH de 8,9, donc théoriquement $8,85 < pH < 8,95$. *On a donc* $10^{-8,85} = 1,1\,10^{-9} < y < 10^{-8,95} = 1,4\,10^{-9}$ *Cela montre que le deuxième chiffre significatif de y n'est pas certain, alors que le pH en a deux.*

IV.2. Présentation d'un résultat de mesure

a) Grandeur, incertitude, unité, niveau de confiance

L'écriture du résultat du mesurage M prend la forme générale

$$\mathbf{M = m \pm \Delta M} \quad \text{, unité, niveau de confiance.}$$

En pratique : on pourra en TP éluder la question du niveau de confiance. Toutefois, il est utile de savoir que celui-ci est de 68% pour l'incertitude-type (écart-type σ), et 95% pour l'incertitude élargie à 2σ.

b) Chiffres significatifs

- Pour la valeur l'incertitude $\mathbf{\Delta M}$ elle-même, obtenir une précision plus petite que 10% correspond à des conditions de mesure très contraignantes et coûteuses (il faut répéter la mesure N fois avec N très grand). Dans la très grande majorité des cas, on se limite à **un seul chiffre significatif pour l'incertitude**.
- Pour l'estimation de la grandeur mesurée **m**, on prendra comme **dernier chiffre significatif** celui de même position (au sens numération) que celui de l'**incertitude**.

Exemple : On mesure $r = 100,251389\,\Omega$ *avec une incertitude* $\Delta r = 0,812349\,\Omega$. *On écrit alors le résultat sous la forme* $R = (100,3 \pm 0,8)\,\Omega$.

V. Analyse graphique

V.1. Généralités

Le but d'une expérience est souvent de dégager une relation entre les grandeurs mesurées, ou de vérifier une loi connue et d'en extraire des paramètres physiques. Cela passe par la réalisation d'un graphe expérimental. Quelques règles sont à respecter :

— Le tracé est fait avec un crayon à papier fin.

— On utilise si possible une pleine page A4. Une échelle trop petite réduit la précision.

— Annoter le graphe : titre, grandeurs sur les axes, unités, pentes ou valeurs déterminées graphiquement, équation d'une régression linéaire...

— Le tracé des "points" de mesure doit faire apparaître les incertitudes sur x (abscisse) et y (ordonnée), si celles-ci sont significatives et visibles à l'échelle du graphe. Dans l'absolu un point de mesure doit donc ressembler à ⊞, la longueur des côtés étant la valeur des incertitudes respectives. Si l'incertitude selon l'un des 2 axes est négligeable, on enlève les 2 côtés correspondants (cf Fig. 5).

— Calculatrices : il est nécessaire de savoir programmer une régression linéaire, et plus généralement des opérations numériques globales sur des vecteurs (lignes ou colonnes de valeurs).

V.2. Régressions linéaires

Il n'y a véritablement que les relations linéaires qui puissent se prêter facilement, et de façon fiable, à une analyse graphique. On cherche à vérifier une relation $y = ax+b$, et à mesurer les paramètres a et b. Deux questions se posent :

1. La relation $y = ax + b$ est-elle vérifiée ?

2. Si oui, quelles sont les incertitudes sur a et b ?

La méthode courante est celle dite des **moindres carrés**. Elle consiste en quelque sorte à **minimiser la distance moyenne des points de mesure à la droite de régression** qui modélise le phénomène. Les distance peuvent être pondérées par les incertitudes associées à chaque mesure. On construit ainsi la somme des carrés des résidus :

$$\chi^2(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{y_i - ax_i - b}{\Delta y_i} \right)^2$$

Le logiciel fournit alors les valeurs estimées de a et b, ainsi que des incertitudes pour a et b. Toutefois, cette évaluation de Δa et Δb est en général insuffisante, car le logiciel ne prend pas en compte les incertitudes Δx_i et Δy_i si on ne le lui a pas demandé [11]. Une méthode simple et subjective pour évaluer correctement Δa et Δb consiste à les évaluer graphiquement, en traçant des **droites extrêmes** passant par les bords des points de mesure (Fig. 5a).

Le logiciel fournit aussi le *coefficient de corrélation*

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\,\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}} \quad \text{avec} \quad \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{et} \quad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\,,$$

qui permet de comparer quantitativement les évolutions des données et de la modélisation linéaire qui en est faite. Ce coefficient est d'autant plus proche de ± 1 que les données se rapprochent du modèle. Au contraire il se rapproche de zéro lorsque les données évoluent de plus en plus indépendemment du modèle.

Il n'existe pas de seuil standard ou universel de part et d'autre duquel on puisse décider si le modèle linéaire est validé ou non. Les valeurs communément admises dépendent non seulement du domaine expérimental considéré (cinétique chimique, optique géométrique, électronique, climatologie, astrophysique, économie, sociologie...), ainsi que du niveau de confiance que l'on choisit [12]. Toutefois, pour les manipulations typiques réalisées en CPGE, on atteint couramment des coefficients de l'ordre de 0,99. En dessous de cette valeur, les écarts sont en général nettement visibles sur le graphe, et il faut plus d'investigation pour trancher.

Le **coefficient de corrélation ne suffit pas** à répondre à la question 1. Le regard subjectif de l'expérimentateur est indispensable, notamment pour détecter un écart ou une tendance systématiques, si les points ne sont apparemment pas distribués aléatoirement de part et d'autre de la droite. Cela implique que **le tracé du graphe est a priori indispensable**.

11. Il est parfois possible, selon les logiciels de traitement, d'inclure les incertitudes dans la régression linéaire. Dans ce cas uniquement, les incertitudes Δa et Δb fournies par le logiciel ont un sens.

12. De façon générale, le fait de décider d'un résultat binaire à partir d'une collection plus ou moins complexe et diversifiée de données nécessite des techniques particulières qui ne peuvent être résumées à la seule notion de corrélation (cf *Analyse de données*).

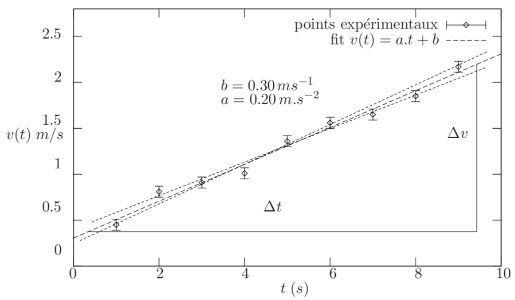

Figure 5a : Régression linéaire et droites extrêmes en échelles linéaires.

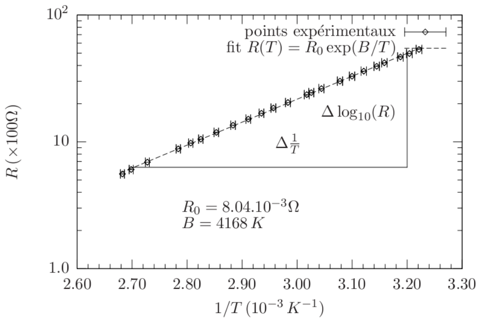

Figure 5b : Régression linéaire en échelles semi-log ou log.

Exemple : *Considérons l'étalonnage d'une thermistance en vue de son utilisation comme capteur de température. Dans un domaine restreint de température, il est possible de modéliser l'évolution de la résistance par une loi exponentielle de la forme :*

$$R(T) = R_0 \exp\left(\frac{B}{T}\right)$$

On souhaite mesurer R_0 et B. On réalise une série de mesures de température (à l'aide d'un thermomètre auxiliaire, $T \in [37,4; 99,8]\,^\circ C$) et de résistance ($R \in [558; 5350]R$). L'incertitude relative sur la résistance est $\frac{\Delta R}{R} = 0,2\%$, quand l'incertitude sur la température est de $\Delta T = 0,5\,K$.

Solution :

On va chercher à valider la relation linéaire

$$\ln R = \ln R_0 + \frac{B}{T}\,,$$

donc tracer le graphe $\ln R = f(\frac{1}{T})$. L'incertitude sur l'abscisse et l'ordonnée des points du graphe s'obtient en différentiant :

$$\Delta\left(\frac{1}{T}\right) = \frac{\Delta T}{T^2} \quad \text{et} \quad \Delta \ln R = \frac{\Delta R}{R} = 0,2\%$$

L'incertitude relative est obtenue par la différenciation logarithmique, ou tous simplement à partir du résultat précédent :

$$T\Delta\left(\frac{1}{T}\right) = \frac{\Delta T}{T} < 0,16\,\% \quad \text{et} \quad \frac{\Delta \ln R}{\ln R} = \frac{\Delta R}{R \ln R} < 0,03\,\%$$

On voit donc que les erreurs sur l'axe des ordonnées sont négligeables à l'échelle du graphique. Donc on peut évaluer seulement celles sur $\frac{1}{T}$ (abscisses). On dresse donc le tableau suivant, avec des colonnes à calculer et remplir à partir des données de mesure et des incertitudes (opérations vectorielles à la calculatrice) [13].

θ (°C)	R (100 Ω)	$\frac{1}{T}$ (K^{-1})	$\ln R$	$\Delta\left(\frac{1}{T}\right) = \frac{\Delta T}{T^2}$ (K^{-1})
99,8	5,58			

Remarque : l'utilisation d'un papier semi-logarithmique peut simplifier le tracé de cette loi. Mais dans ces conditions il faut faire attention à la détermination de la pente (cf Fig. 3b) :

$$B = \frac{\Delta \ln R}{\Delta(1/T)} = \ln 10\,\frac{\Delta \log_{10} R}{\Delta(1/T)}$$

où $\Delta \log_{10} R$ n'est pas directement lisible sur l'axe du graphe.

Remarque : On n'est pas obligé de spécifier une unité pour $\ln R$ bien que ses valeurs dépendent de l'unité de R. Par contre, R_0 sera obtenu avec la même unité de R.

13. Par manque de temps, on peut évaluer une incertitude commune à tous les points de mesure, en ayant soin de prendre le maximum sur la série (évaluation pessimiste).

VI. Résumé pratique pour les TP

- S'assurer que l'instrument est correctement étalonné, correctement réglé et utilisé dans son domaine nominal (élimination des erreurs systématiques).
- Le plus souvent on ne conduit qu'une seule mesure et il faut donc faire une estimation de type B de l'incertitude.
- On recherche l'indication du constructeur si elle est disponible, sinon on estime l'écart maximal Δ_{max} entre les valeurs possibles et on prend $\Delta = \frac{\Delta_{\text{max}}}{2\sqrt{3}}$.
- Si plusieurs sources d'erreurs sont présentes, on calcule la plus dangereuse si elle existe.
- S'il faut tenir compte de plusieurs incertitudes du même ordre, on les compose en sommant les variances :

  $$\Delta = \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + ...}$$

  En particulier, s'il existe une incertitude de lecture substantielle, on aura une formule du type

  $$\Delta = \sqrt{\Delta_{\text{constructeur}}^2 + \Delta_{\text{lecture}}^2}$$

- Pour la propagation des erreurs/incertitudes, on utilise préférentiellement la différentielle logarithmique, qui fournit directement l'incertitude relative et qui est souvent plus facile à calculer.
  Dans les cas complexes, la relation à utiliser sera donnée.
- Lors du tracé des points de mesure, on représente les barres d'erreur/incertitude.

ANNEXE : Caractéristiques générales d'un appareil de mesure

Classe : La classe de précision d'un appareil est un pourcentage du calibre. Elle permet d'évaluer l'incertitude sur la mesure fournie par un appareil.

Fidélité ou répétabilité (repeatability) : c'est la qualité de l'instrument qui fournit des valeurs faiblement dispersées lors de mesures répétables.

Erreur de justesse (bias) : c'est l'erreur systématique de l'instrument. Elle est définie par l'écart entre la valeur d'un étalon et la moyenne d'un grand nombre de mesures obtenues dans des conditions de répétabilité. Réduire cette erreur est l'étalonnage de l'instrument.

Erreur de zéro (zero error) : c'est l'erreur de l'instrument pour une valeur nulle de la grandeur à mesurer (mesurande). Cette erreur de zéro est souvent compensable directement.

Calibre (nominal range) : C'est le maximum des valeurs mesurables avec un réglage donné (étendue des mesures).

Etendue de mesure : c'est l'intervalle de mesures dans lequel l'erreur de mesure spécifiée par le constructeur est garantie.

Sensibilité (sensitivity) : c'est le rapport $S = \frac{\Delta R}{\Delta E}$ de l'accroissement de la réponse ΔR, pour un accroissement ΔE du signal à mesurer. Si les résultats d'une mesure répétée ne varient pas, cela signifie que l'on a mal choisi (ou réglé) l'appareil de mesure : il ne voit pas les faibles variations du signal mesuré. Attention, sur un écran digital, le nombre d'afficheurs ne donne pas la sensibilité de l'appareil.

Résolution (resolution) : c'est la plus petite différence du dispositif afficheur perceptible. C'est la demi graduation pour un appareil à aiguille et le dernier chiffre affiché pour un appareil numérique.

En outre, un appareil de mesure est toujours caractérisé par un **temps de réponse fini**. Pour citer deux exemples :

— Un multimètre est caractérisé par une bande passante finie (quelques kHz en général). Toute mesure sur des signaux de fréquence plus élevée sera systématiquement erronée.

— Les capteurs ont également un temps de réponse fini, photodiode (quelques nano-secondes selon modèle), phototransistor (de l'ordre de la micro-seconde), capteur piezo-électrique ...

Important : En définitive, comme il s'agit toujours de mesurer une réponse à une excitation extérieure il faut toujours se demander si l'instrument (capteur et/ou électronique de conditionnement) peut répondre au signal que l'on cherche à mesurer.