

INTRODUCTION

Mesure, unités et dimensions

I. Mesure et unités

DÉFINITION : Mesure d'une grandeur

Mesurer^a une *grandeur* X , c'est lui affecter un nombre m_X (une *quantité*) en référence à une autre grandeur X_0 de **même nature** prise comme *étalon* (l'*unité*). Une mesure est donc une **comparaison**, qui se traduit mathématiquement par la relation de proportionnalité $X = m_X X_0$.

a. «In physical science a first essential step in the direction of learning any subject is to find principles of numerical reckoning and practicable methods for measuring some quality connected with it. I often say that when you can measure what you are speaking about and express it in numbers you know something about it; but when you cannot measure it, when you cannot express it in numbers, your knowledge is of a meager and unsatisfactory kind : it may be the beginning of knowledge, but you have scarcely, in your thoughts, advanced to the stage of science, whatever the matter may be.»

William Thomas Thomson, Lord Kelvin, *Electrical Units of Measurement* (1883), *Popular Lectures and Addresses* (1891), Vol. I, 80-I.

REMARQUES :

- Deux grandeurs sont dites de *même nature* précisément si elles peuvent être comparées. Elles peuvent alors s'exprimer dans la même unité, et peuvent être **additionnées** (ou soustraites). Inversement, deux grandeurs de nature différente ne peuvent s'exprimer dans la même unité, ni être additionnées.
- Toute mesure est affectée d'une *incertitude*, notée $u(X)$, que nous apprendrons à évaluer plus tard. Par ailleurs, le nombre m_X , qui est un *réel*, est en pratique un *nombre décimal* car la précision est toujours limitée.

II. Les unités du Système International (SI)

Le système international d'unités de mesure¹ a été fondé en 1960². Il est composé de sept unités de base³, à partir desquelles toutes les autres unités, dites *dérivées*, sont construites.

La définition d'une unité fondamentale est toujours reliée à un protocole expérimental qui permet de la quantifier, c'est-à-dire de connaître sa *valeur numérique* à une certaine *incertitude* près. La précision de l'unité dépend donc du protocole expérimental choisi et des performances techniques et expérimentales du moment. Jusqu'en 2019, l'ensemble des 7 définitions restait hétérogène et instable. Certaines unités étaient définies d'une façon trop dépendante du contexte expérimental contemporain, ce qui les condamnait à devoir être révisées au gré des progrès de la métrologie. En mai 2019 est entré en vigueur le nouveau SI suite à une révision profonde, menée par la Conférence Générale des Poids et Mesures (CGPM). Ce processus, démarré en 1967 (révision de la seconde) puis en 1984 (révision du mètre), consiste à **faire reposer les définitions des unités sur des constantes fondamentales déclarées connues exactement**⁴. Ainsi, quatre unités ont été modifiées à la dernière révision : le kilogramme, l'ampère, le kelvin et la mole. Le SI est maintenant plus pérenne et plus flexible.

II.1. Les 7 constantes fondamentales

Les sept constantes définissant le SI sont présentées dans le tableau et le logo ci-dessous⁵. Elles ont été choisies de sorte que **toute unité du SI puisse être exprimée à partir de l'une de ces sept**

1. Références : www.bipm.org et www.metrologie-francaise.fr

2. Il est aujourd'hui adopté par la totalité des états à l'exception de quatre, dont les États-Unis et l'Alaska.

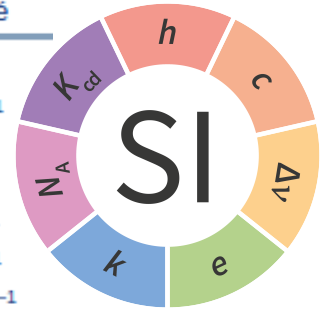
3. La mole a été ajoutée après coup en 1971

4. Comme leur nom l'indique, les constantes fondamentales de la physique sont non seulement *constantes*, mais aussi universelles c'est-à-dire *invariantes* au sein de notre univers.

5. Sous licence CC BY-ND 4.0.

constantes ou à partir de produits ou rapports de ces constantes. La valeur numérique de chacune des sept constantes définissant le SI n'a pas d'incertitude.

Constante	Symbole	Valeur numérique	Unité
fréquence de la transition hyperfine du césium	$\Delta\nu_{Cs}$	9 192 631 770	Hz
vitesse de la lumière dans le vide	c	299 792 458	$m \cdot s^{-1}$
constante de Planck	h	$6,626\,070\,15 \times 10^{-34}$	J s
charge élémentaire	e	$1,602\,176\,634 \times 10^{-19}$	C
constante de Boltzmann	k	$1,380\,649 \times 10^{-23}$	$J \cdot K^{-1}$
constante d'Avogadro	N_A	$6,022\,140\,76 \times 10^{23}$	mol^{-1}
efficacité lumineuse	K_{cd}	683	$lm \cdot W^{-1}$



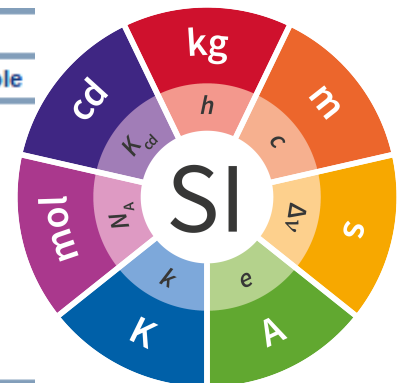
Les unités hertz (Hz), joule (J), coulomb (C), lumen (lm) et watt (W), sont reliées aux unités seconde (s), mètre (m), kilogramme (kg), ampère (A), kelvin (K), mole (mol) et candela (cd), selon les relations suivantes :

$$Hz = s^{-1}, \quad J = kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}, \quad C = A \cdot s, \quad lm = cd \cdot m^2 \cdot m^{-2} = cd \cdot sr, \quad \text{et} \quad W = kg \cdot m^2 \cdot s^{-3}$$

II.2. Les 7 unités fondamentales

La définition de chacune des 7 unités de base (cf tableau ci-dessous) est obtenue à l'aide d'une ou plusieurs de ces constantes, selon les cas. En pratique chaque unité est rattachée à une constante fondamentale particulière, et si besoin à des unités fondamentales qui en sont indépendantes. Ceci est résumé sur le logo ci-dessous.

Grandeur de base		Unité de base	
Nom	Symbole caractéristique	Nom	Symbole
temps	t	seconde	s
longueur	$l, x, r, \text{etc.}$	mètre	m
masse	m	kilogramme	kg
courant électrique	I, i	ampère	A
température thermodynamique	T	kelvin	K
quantité de matière	n	mole	mol
intensité lumineuse	I_v	candela	cd



Les définitions qui en découlent sont indiquées ci-après.

Unité de temps - la seconde (s, 1967, $< 10^{-11}$) : La seconde est définie à partir de la fréquence $\Delta\nu_{Cs}$ de la transition hyperfine de l'état fondamental de l'atome de césium 133 non perturbé. Ainsi, la seconde est la durée égale à 9 192 631 770 périodes de cette radiation.

Unité de longueur - le mètre (m, 1984, 10^{-11}) : Le mètre est défini à partir de la célérité de la lumière dans le vide c en $m \cdot s^{-1}$, et de la seconde. Ainsi, le mètre est la distance parcourue par la lumière dans le vide pendant une durée de $1/299\,792\,458$ de seconde.

Unité de masse - le kilogramme (kg, 2019, 10^{-8}) : Le kilogramme est défini à partir de la constante de Planck h en $J \cdot s = kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}$, de la seconde et du mètre.

Unité de courant électrique - l'Ampère (A, 2019) : L'ampère est fixé à partir de la charge électrique élémentaire e en C, et de la seconde.

Unité de température thermodynamique - le Kelvin (K, 2019) : Le Kelvin est défini à partir de la constante de Boltzmann k en $J \cdot K^{-1} = kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} \cdot K^{-1}$, du kilogramme, du mètre et de la seconde.

Unité de quantité de matière - la mole (mol, 2019) : La mole est fixée par le nombre d'Avogadro N_A exprimé en mol^{-1} .

Unité d'intensité lumineuse - la candela (cd, 1979) : La candela est définie à partir de l'efficacité lumineuse K_c d'un rayonnement monochromatique de fréquence $540 \cdot 10^{12}$ Hz, en $\text{lm} \cdot \text{W}^{-1} = \text{cd} \cdot \text{sr} \cdot \text{W}^{-1}$, du kilogramme, du mètre et de la seconde.

II.3. Unités dérivées

Les unités dérivées sont construites par **produits de puissances entières** d'unités fondamentales⁶, c'est-à-dire sous la forme : $\text{kg}^\alpha \text{m}^\beta \text{s}^\gamma \text{A}^\delta \text{K}^\epsilon \text{mol}^\eta \text{cd}^\xi$.

Par exemple, l'unité de force SI est le Newton : $1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$, ce que l'on peut déduire du principe fondamental de la dynamique.

II.4. Puissances de 10 et préfixes du Système International (SI)

Facteur	Nom	Symbole	Facteur	Nom	Symbole
10^1	déca	da	10^{-1}	déci	d
10^2	hecto	h	10^{-2}	centi	c
10^3	kilo	k	10^{-3}	milli	m
10^6	méga	M	10^{-6}	micro	μ
10^9	giga	G	10^{-9}	nano	n
10^{12}	téra	T	10^{-12}	pico	p
10^{15}	péta	P	10^{-15}	femto	f
10^{18}	exa	E	10^{-18}	atto	a
10^{21}	zetta	Z	10^{-21}	zepto	z
10^{24}	yotta	Y	10^{-24}	yocto	y

III. Dimensions

Il peut exister plusieurs unités différentes pour une seule grandeur, puisqu'il y a plusieurs façons de définir un étalon. Deux grandeurs de même nature peuvent donc s'exprimer dans des unités différentes, qui diffèrent par un facteur numérique fixé.

DÉFINITION : Dimension d'une grandeur

La dimension d'une grandeur est une expression mathématique de ce qu'elle a en commun avec une autre grandeur de même nature.

III.1. Dimensions fondamentales

A chaque unité fondamentale correspond une nature de grandeur X , et donc une dimension, notée $[X]$.

X	Masse	Longueur	Temps	Courant	Température	Quantité de mat.	Intensité lum.
$[X]$	M	L	T	I	Θ	N	J

6. Les lois physiques s'expriment souvent sous la forme de produits de puissances de grandeurs, ou de sommes de tels produits. Cela tient probablement à l'importance des développements polynômiaux en Mathématiques pour l'analyse... cf cours de Maths.

III.2. Dimension d'une grandeur quelconque

DÉFINITION : Dimension d'une grandeur - Equation aux dimensions

La dimension d'une grandeur quelconque s'exprime par la décomposition en facteurs puissances de dimensions fondamentales, correspondant à la décomposition de son unité en fonction des unités fondamentales.

Ainsi, si l'unité de X est le $\text{kg}^\alpha \text{m}^\beta \text{s}^\gamma \text{A}^\delta \text{K}^\epsilon \text{mol}^\eta \text{cd}^\xi$, sa dimension sera notée par l'équation

$$[X] = \text{M}^\alpha \text{L}^\beta \text{T}^\gamma \text{I}^\delta \Theta^\epsilon \text{N}^\eta \text{J}^\xi .$$

REMARQUES :

- Un grandeur qui est le rapport de deux grandeurs de même dimension est dite *sans dimension*. On la note $[X] = 1$.
- Une grandeur sans dimension peut avoir une unité. Exemples :
 - un angle (rapport de deux longueurs) est mesuré en *radian* (rad) ;
 - un angle solide (rapport de deux surfaces) est mesuré en *steradian* (sr) ;
 - une atténuation (rapport de deux intensités), peut être mesurée en *décibel* (dB).
- La notion de dimension exprime le fait que les lois physiques sont fondamentalement indépendantes du choix des unités. Un changement d'unité implique une modification des valeurs des constantes fondamentales, l'apparition éventuelle d'un facteur numérique sans dimension dans une équation, mais pas un changement des lois.

III.3. Analyse dimensionnelle

DÉFINITION : Homogénéité d'une équation

Une équation est dite *homogène* si tous les termes qui sont sommés sont de même dimension. Ceci implique notamment que les membres de droite et de gauche sont de même dimension.

En physique, une équation doit toujours être homogène !

APPLICATIONS :

Outils qualitatif d'investigation : L'analyse dimensionnelle permet l'approche rapide d'un problème physique. La méthode consiste à identifier l'ensemble des grandeurs (ou *paramètres*) pertinentes d'un phénomène physique, pour en déduire la dépendance d'une grandeur en fonction des autres. Cette analyse fonctionne dans le cas fréquent où la loi recherchée s'exprime par un produit de puissances. On obtient alors cette loi à un facteur numérique près sans dimension qui ne peut être obtenu que par une étude théorique plus poussée, ou par l'expérience.

Elimination des erreurs : De façon plus terre-à-terre, l'analyse dimensionnelle permet d'éliminer un grand nombre d'erreurs issues d'une mauvaise modélisation, ou d'une mauvaise manipulation du formalisme (erreur de calcul), conduisant à des équations inhomogènes. Ainsi, **on veillera toujours à contrôler l'homogénéité d'un résultat à l'issue d'un calcul**. C'est à la fois un réflexe extrêmement utile et une preuve de sens physique.

REMARQUE : Contrôle de la pertinence d'un résultat physique :

A l'issue d'une modélisation et de calculs, on obtient un *résultat littéral* (équation, inéquation, relation, «formule»...). On procède dans cet ordre à une vérification

- de l'homogénéité ;
- des signes ;
- de la dépendance fonctionnelle en les divers paramètres (croissant ? décroissant ? linéaire ? diverge ou converge ? tend vers zéro ? décroissance rapide, lente...).

En interrogeant tout cela, on développe son **sens physique**.

ANNEXE : Usage des lettres grecques en physique

Les lettres grecques sont abondamment utilisées en sciences. Aussi est-il important de savoir convenablement les écrire pour ne pas les confondre, mais également de savoir les dénommer correctement afin de pouvoir communiquer avec autrui sans malentendu.

<i>Lettres</i>	<i>Minuscule</i>	<i>Majuscule</i>	<i>Exemples en physique</i>
alpha	α	A	α : angle, coefficient de dilatation
beta	β	B	β : angle
gamma	γ	Γ	γ : conductivité
delta	δ	Δ	δx : quantité infinitésimale Δ : variation (différence finie)
epsilon	ϵ ou ε	E	ε : quantité infinitésimale
zeta	ζ	Z	
eta	η	H	η : courant électromoteur, rendement
theta	θ ou ϑ	Θ	θ : angle
iota	ι	I	
kappa	κ	K	κ : courbure locale d'une fonction
lambda	λ	Λ	λ : longueur d'onde, longitude
mu	μ	M	μ : préfixe d'unité "micro" (10^{-6})
nu	ν	N	ν : fréquence
xi	ξ	Ξ	
omicron	o	O	
pi	π	Π	Π : produit de termes (maths)
rho	ρ	P	ρ : masse volumique, résistivité
sigma	σ	Σ	σ : surface, conductivité Σ : surface, somme de termes (maths)
tau	τ	T	τ : temps de relaxation (caractéristique)
upsilon	v	Y	
phi	ϕ ou φ	Φ	φ : phase, angle Φ : flux magnétique
khi	χ	X	χ : coefficient de compressibilité d'un fluide
psi	ψ	Ψ	ψ : phase
omega	ω	Ω	ω : pulsation Ω : unité Ohm