Filtres linéaires

Fonctions de transfert canoniques et diagrammes de Bode

On se place en régime sinusoïdal forcé (RSF), de pulsation ω.

- Tension d'entrée du filtre : $u_e(t) = U_e \cos(\omega t)$ et $\underline{u}_e = U_e\, e^{j\omega t}$.
- Tension de sortie du filtre : $u_s(t) = U_s \cos(\omega t + \varphi)$ et $\underline{u}_s = U_s\, e^{j\varphi}\, e^{j\omega t}$.
- Fonction de transfert : $\underline{H} = \dfrac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \dfrac{\mathrm{N}(j\omega)}{\mathrm{D}(j\omega)}$ où N et D sont deux polynômes à coefficients réels.

Rappel de vocabulaire sur le RSF :
— *Amplitude* de u_s : U_s.
— *Amplitude complexe* de u_s : $\underline{U}_s = U_s\, e^{j\varphi}$.
— *Valeur efficace* de u_s : $U_s/\sqrt{2}$.

L'ordre du filtre est le degré de D. Qu'il soit d'ordre 1 ou 2, le filtre est **stable** si et seulement si les coefficients de D sont **tous de même signe** (cf équation différentielle associée). Ceci peut permettre d'identifier des erreurs de calcul [1].

Une fonction de transfert peut toujours se mettre sous la forme d'un rapport de deux fonctions chacune **sans dimension** [2]. Ainsi on peut toujours définir une pulsation *caractéristique* ou *propre* qu'on peut noter ω_0 et tout exprimer en fonction de la pulsation réduite $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ et d'un paramètre sans dimension H_0. Pour les filtres du second ordre, on doit introduire un second nombre sans dimension Q, appelé facteur de qualité du filtre, qui coïncide avec le *facteur de qualité* dans le cas des résonances [3].

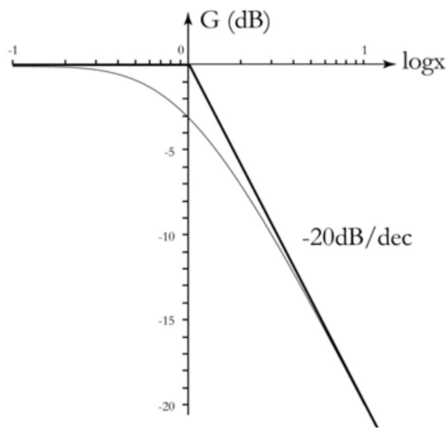
Tous les graphiques sont tracés pour $\mathbf{H_0 = 1}$.

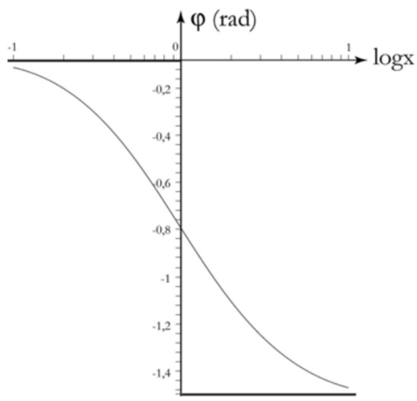
I. Filtres du premier ordre

Filtre Passe-bas

$$\boxed{\underline{H} = H_0\,\frac{1}{1+jx}}$$

H_0 est le « gain » statique.

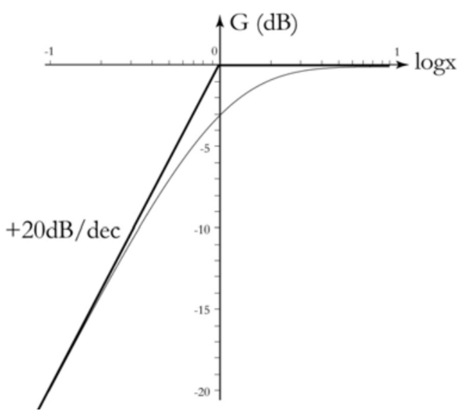


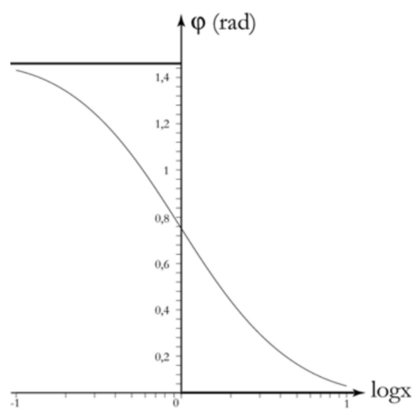


Filtre Passe-haut

$$\boxed{\underline{H} = H_0\,\frac{jx}{1+jx}}$$

H_0 est le « gain » à haute fréquence.





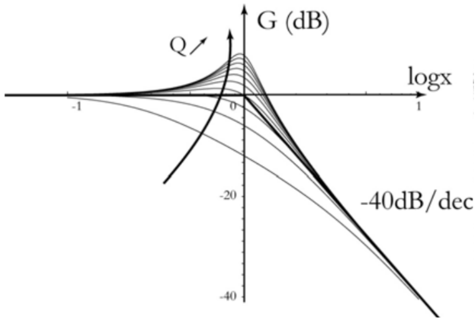
1. attention il faut écrire un polynôme en $j\omega$.
2. car c'est un rapport entre deux tensions, ou parfois deux courants.
3. On définit aussi parfois plutôt le facteur d'amortissement ξ tel que $2\xi = \frac{1}{Q}$.

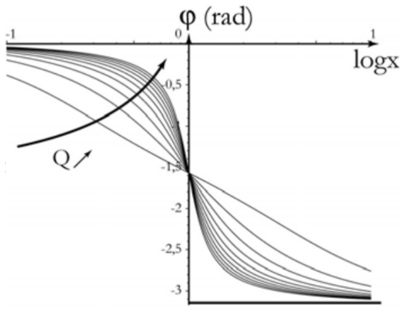
II. Filtres du second ordre

Filtre Passe-bas

$$\boxed{\underline{H} = H_0 \, \frac{1}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}}$$

H_0 est le « gain » statique.

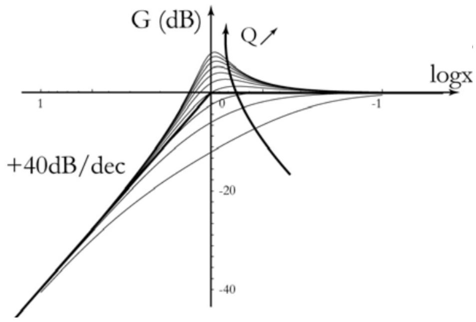


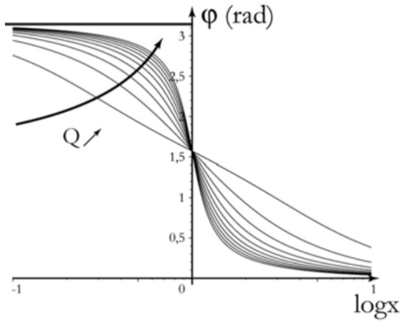


Filtre Passe-haut

$$\boxed{\underline{H} = H_0 \, \frac{-x^2}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}}$$

H_0 est le « gain » à haute fréquence.



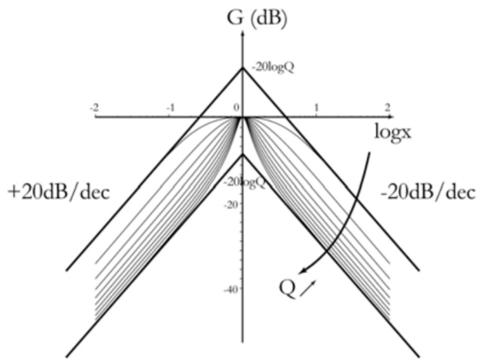


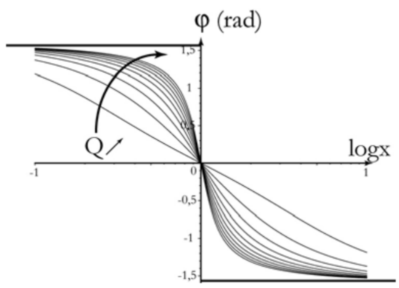
Filtre Passe-bande

$$\boxed{\underline{H} = H_0 \, \frac{jx}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}}$$

$$\boxed{\underline{H} = \frac{H_0 \, Q}{1 + jQ(x - \frac{1}{x})}}$$

$H_0 \, Q$ est le « gain » à la fréquence propre.



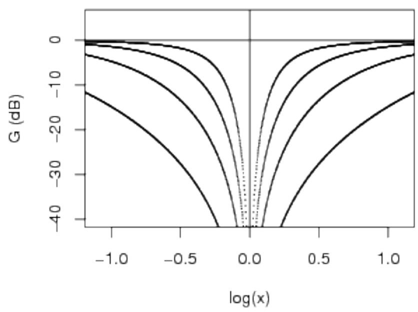


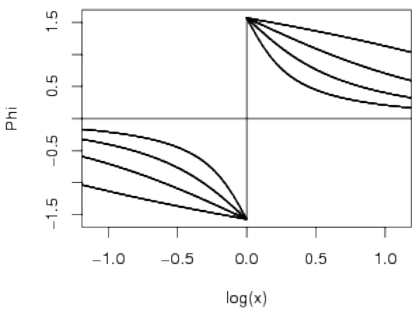
Filtre Réjecteur de bande

$$\boxed{\underline{H} = H_0 \, \frac{1 - x^2}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}}$$

$$\boxed{\underline{H} = H_0 \, \frac{1}{1 - j\frac{1}{Q(x - \frac{1}{x})}}}$$

H_0 est le « gain » à basse et haute fréquence.





Remarques :

- **Symétrie** entre G_{PBas} et G_{PHaut} (1^er^et 2^nd^ ordre) car $|\underline{H}_{\text{PBas}}(1/jx)| = |\underline{H}_{\text{PHaut}}(jx)|$.
- 1^er^ordre : on peut toujours écrire la phase à l'aide d'une unique relation valable pour tout x : $\varphi(x) = \arctan(x) \ (+\frac{\pi}{2})$. Le diagramme de Bode de la phase est alors à **symétrie centrale**.
- 2^nd^ ordre : on peut toujours écrire la phase à l'aide d'une unique relation valable pour tout x à condition de factoriser le dénominateur
  - par $j\frac{x}{Q}$ dans les cas passe-bas, passe-haut et passe-bande : $\varphi(x) = -\arctan\left(Q(x - \frac{1}{x})\right) \ (\mp\frac{\pi}{2})$.
  - par $1 - x^2$ dans le cas du réjecteur : $\varphi(x) = \arctan\left(1/Q(x - \frac{1}{x})\right)$.

  Le diagramme de Bode de la phase est alors aussi à **symétrie centrale**.