Cinématique du point

Introduction à la mécanique

Définition : **Mécanique**

La *mécanique* est la branche de la physique qui étudie et quantifie le **mouvement** des objets matériels, dans l'**espace** et dans le **temps**, et propose des descriptions des **causes** de ces mouvements.

Définition : **Cinématique**

La *cinématique* recouvre l'étude ou la description mathématique du mouvement, indépendamment de ses causes éventuelles. Cela implique la construction d'un repérage dans l'espace et dans le temps. Pour cela on utilise des corps rigides de référence (ex : étoiles, Terre) et des horloges, dont l'association forme un **référentiel**.

Définition : **Dynamique**

La *dynamique* décrit les relations entre les causes du mouvement des corps matériels et la nature du mouvement lui-même. Ces relations portent le nom de *forces*.

La mécanique classique a été fondée par l'italien Galilée et l'anglais Newton, aux XVI$^{\text{è}}$ et XVII$^{\text{è}}$ siècles. C'est un socle sur lequel s'appuient largement les autres branches de la physique. On y développe des notions fondamentales : énergie, oscillateurs... C'est aussi une discipline à part entière.

La cinématique du point s'intéresse au mouvement de **points matériels** (aussi appelés *mobiles*). Elle permet de décrire :

— le mouvement des **particules** de petite dimension,

— le **mouvement d'ensemble** des systèmes matériels solides ou déformables (ex : un astre, une boule de pétanque, un parachutiste avec son parachute...) c'est-à-dire le mouvement du *centre d'inertie*.

La cinématique du solide permet notamment de décrire le **mouvement propre** des solides, qui consiste en des rotations autour d'axes. Le programme de physique de CPGE se limite aux solides en translation et en rotation autour d'un axe fixe. Les situations plus complexes seront vues en Sciences de l'Ingénieur.

Les difficultés qui se présenteront :

— la bonne **définition du système**, et des **actions** qu'il subit,

— l'**algébrisation** des équations et la projection des relations vectorielles,

— la **résolution** mathématique des équations différentielles obtenues.

Repères historiques

- **Système géocentrique de Plotémée** (jusqu'à la fin du moyen-âge) : La Terre est supposée immobile au centre de l'Univers.
- **Description du système solaire - Copernic** (début XVI$^{\text{è}}$ s.) : La Terre tourne autour du Soleil.
- **Galilée** (1583-1642) : Etude expérimentale de la chute libre et du pendule. Observations diverses du système solaire avec la lunette (dite "de Galilée").
- **Newton** (1687) : Lois fondamentales de la dynamique (principe d'inertie, principe fondamental de la dynamique, principe des actions réciproques).
- **Mécanique relativiste - Einstein** (1905) : On travaille dans un référentiel à 4 dimensions équivalentes. Le temps n'est plus une notion absolue mais dépend du référentiel d'étude. La mécanique classique demeure valable pour les vitesses faibles devant celle de la lumière ($v \ll c$).
- **Mécanique quantique - Heisenberg** (1926) : on ne peut connaître simultanément, avec une précision parfaite, la position et la vitesse d'une particule. Au niveau atomique, la trajectoire est remplacée par un champ (la fonction d'onde), qui donne accès à la probabilité de présence des particules. La mécanique quantique peut toutefois se manifester à l'échelle macroscopique par des effets collectifs spectaculaires (supra-conductivité, super-fluidité, ...).
- **Systèmes dynamiques chaotiques - Lorentz** (1960) : Des systèmes non-linéaires, possédant au moins trois degrés de liberté, se comportent de manière aléatoire dans certaines conditions. Cela signifie qu'on ne peut prédire leur évolution au-delà d'une limite temporelle plus ou moins proche. ***Exemples :*** pendules faiblement couplés avec frottement non-linéaire, équation de Navier-Stokes de la mécanique des fluides (effet papillon, sensibilité aux conditions initiales), le cours des valeurs boursières...

I. Temps, espace, référentiels

I.1. Le temps et sa mesure

L'étude du mouvement d'un mobile nécessite un repérage temporel des *événements*, c'est-à-dire du passage du mobile en des lieux successifs. L'écoulement du temps est repéré grâce à une *horloge*, c'est-à-dire n'importe quel système physique au comportement **périodique**. Sa période définit une **unité de temps**. Un *instant* t est mesuré par la durée le séparant d'un instant de référence $t = 0$. La *durée* est mesurée par un procédé de comparaison aux oscillations de l'horloge : on compte le nombre q (entier) d'oscillations entre les instants t_i et t_f, de telle sorte que $\Delta t = t_f - t_i = qT$, où T est la période des oscillations.

Exemple : l'unité de la seconde dans le système international correspond à un nombre entier de périodes d'une certaine radiation électromagnétique de l'atome de Cesium 133.

Universalité et relativité de l'écoulement du temps :
En mécanique classique (Newtonienne), l'écoulement du temps est le même pour tout observateur, quelque soit son mouvement. On dit que le temps est **absolu**. C'est différent en relativité, c'est-à-dire pour des vitesses proches de celle de la lumière. Le temps s'écoule moins vite dans un référentiel en mouvement rapide (contraction et dilatation des durées).

I.2. Référentiels

a. *Définitions*

Solide ($\mathcal{S}$) : système matériel indéformable, c'est-à-dire dont les points matériels sont à distance constante l'un de l'autre.

Référentiel ($\mathcal{R}$) : association d'un solide de référence et d'une horloge.
REMARQUE : comme le temps est absolu en mécanique classique, on assimile souvent le référentiel à son solide de référence, par abus de langage.

Repère : la donnée d'un point O appelé *origine* et d'un système de trois axes (ou trois vecteurs) non coplanaires.
Exemple : le repère cartésien (O_{xyz}) a pour axes (O_x), (O_y) et (O_z).
REMARQUES :

- il existe une infinité de repères possibles pour un référentiel.
- un repère peut être mobile dans un référentiel (repère lié à un manège en rotation, à un véhicule en mouvement...).

Référentiel et repère fixe : la données de 4 points non coplanaires du solide de référence $\mathcal{S}$ permet de définir un repère fixe $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dans $\mathcal{R}$. Il est alors d'usage de noter de façon condensée (mais abusive)

$$\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}),$$

l'horloge étant alors sous-entendue.
Exemple : En utilisant le repère cartésien (O_{xyz}) attaché au solide de référence avec la BOND $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, on note le référentiel $\mathcal{R} = (O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

Position du mobile : la donnée de trois coordonnées d'espace relatives au repère choisi.
Exemples : (x, y, z) (cartésiennes), (r, θ, z) (cylindro-polaires) ou (r, θ, φ) (sphériques).

Événement : la donnée de trois coordonnées d'espace et d'une de temps.
Exemple : (x, y, z, t). Le point M est en (x, y, z) à l'instant t.

Trajectoire (d'un mobile M) : courbe formée par l'ensemble des positions successives occupées par le mobile.
***Exemples :* Trajectoire...**

— **rectiligne** : c'est une droite (ex : chute libre sans vitesse initiale).
— **circulaire** : c'est un cercle (ex : électron autour du noyau, satellite).
— **elliptique, parabolique, hyperbolique** : c'est une conique (ex : mouvement des astres, masse au bout d'un ressort sur un plan).
— **cycloïdale** : combinaison circulaire + rectiligne dans le plan du cercle (ex : valve de roue de vélo).
— **hélicoïdale** : combinaison circulaire + rectiligne orthogonal au cercle (ex : point d'une hélice d'avion).

REMARQUE : la trajectoire d'un mobile **dépend du référentiel** d'observation de son mouvement.

Distance curviligne : longueur du chemin courbe emprunté par le mobile pour aller d'un point à un autre (ex : mouvement le long d'un cercle, sur une sphère...). Cette longueur dépend de la trajectoire.

Vocabulaire : une grandeur peut être

— *constante* : elle ne dépend pas du temps (contraire : *variable*).
— *uniforme* : elle ne dépend pas des coordonnées d'espace (même valeur en tout lieu).
— *invariante* : elle ne dépend pas du référentiel d'étude (contraire : *relative*).

b. Mouvements relatifs de solides/référentiels

Certains référentiels dits *galiléens* seront privilégiés par la suite, pour l'étude de la dynamique. Pour les distinguer, il faut savoir classer leur différents types de mouvements relatifs (ou plus précisémment les mouvements relatifs de leurs solides de référence).

DÉFINITIONS :

- $\mathcal{R}_2$ est en **translation** par rapport $\mathcal{R}_1$ si tout axe fixe dans $\mathcal{R}_2$ reste parallèle à un axe fixe dans $\mathcal{R}_1$ (donc garde une direction fixe dans $\mathcal{R}_1$).
- $\mathcal{R}_2$ est en **translation rectiligne/circulaire** par rapport $\mathcal{R}_1$ s'il est en translation par rapport $\mathcal{R}_1$ et qu'au moins un point de $\mathcal{R}_2$ a un mouvement rectiligne/circulaire dans $\mathcal{R}_1$.
- $\mathcal{R}_2$ est en **rotation** autour de l'axe Δ fixe dans $\mathcal{R}_1$ si Δ est aussi fixe dans $\mathcal{R}_2$.

SCHEMA

SCHEMA

SCHEMA

c. Exemples de référentiels

Réf. héliocentrique ($\mathcal{R}_\odot$) : formé par le centre du Soleil pour origine et un système de trois axes qui pointent vers des étoiles pratiquement fixes.

Réf. de Copernic ($\mathcal{R}_C$) : comme le réf. héliocentrique sauf que l'origine est placée au centre d'inertie (ou centre de masse) du système solaire.

Réf. géocentrique ($\mathcal{R}_G$) ou planéto-centrique : comme le réf. héliocentrique sauf que l'origine est placée au centre d'inertie de la Terre (de la planète).
$\mathcal{R}_G$ est (approximativement) en translation circulaire par rapport à $\mathcal{R}_\odot$ (ou $\mathcal{R}_C$).

Réf. terrestre ($\mathcal{R}_T$) : lié à la Terre, tournant avec elle autour de l'axe des pôles.
$\mathcal{R}_T$ est en rotation par rapport à $\mathcal{R}_G$ autour de l'axe des pôles.

I.3. Fonction vectorielle du temps - dérivation temporelle

a. Fonction vectorielle

DÉFINITION : Fonction vectorielle d'une variable s (temps, coordonnée...)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F}:\quad & \mathbb{R}\to\mathbb{R}^3\\ & s\mapsto \overrightarrow{F}(s)=(F_1(s),F_2(s),F_3(s))\end{aligned}$$

Le vecteur peut-être décomposé sur une base locale quelconque **indépendante de s** :

$$\overrightarrow{F}(s)=F_x(s)\vec{e}_x+F_y(s)\vec{e}_y+F_z(s)\vec{e}_z$$

DÉFINITION : Dérivation d'une fonction vectorielle

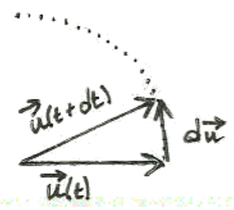
$$\overrightarrow{F}'(s)=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\overrightarrow{F}(s+\varepsilon)-\overrightarrow{F}(s)}{\varepsilon}=\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{F}}{\mathrm{d}s}(s)$$

- $\mathrm{d}\overrightarrow{F}$: notation pour $\overrightarrow{F}(s+\varepsilon)-\overrightarrow{F}(s)$ avec ε très petit.
- $\mathrm{d}s$: notation pour $s+\varepsilon-s$ avec ε très petit.

PROPRIÉTÉS :
- $(\overrightarrow{F}.\overrightarrow{G})'=\overrightarrow{F}'.\overrightarrow{G}+\overrightarrow{F}.\overrightarrow{G}'$
- $(\overrightarrow{F}\wedge\overrightarrow{G})'=\overrightarrow{F}'\wedge\overrightarrow{G}+\overrightarrow{F}\wedge\overrightarrow{G}'$
- soit f une fonction scalaire de s : $(f.\overrightarrow{F})'=f'.\overrightarrow{F}+f.\overrightarrow{F}'$.

PROPRIÉTÉ : Vecteur de norme indépendante de s
(ex : vecteur unitaire)

$$||\vec{u}||=\mathrm{cte}\quad\Longleftrightarrow\quad\vec{u}.\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}s}=0$$



Si un vecteur est fonction d'une variable mais **de norme constante**, alors **sa dérivée est orthogonale à lui-même**.

b. *Dérivation temporelle*

On s'intéresse maintenant à des fonctions du temps : $s = t$. On se place dans un référentiel $\mathcal{R}$.

➔ Fonction **scalaire** : $f(t)$ admet pour dérivée $\boxed{f'(t) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \dot{f}(t)}$.

PROPRIÉTÉ : **La dérivée d'une fonction scalaire ne dépend pas du référentiel d'étude.**

➔ Fonction **vectorielle** : on décompose $\overrightarrow{A}(t)$ dans une base $\mathcal{B} = (\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$, d'où

$$\overrightarrow{A}(t) = A_x(t)\,\vec{e}_x + A_y(t)\,\vec{e}_y + A_z(t)\,\vec{e}_z$$

Considérons un référentiel $\mathcal{R}$ **dans lequel la base $\mathcal{B}$ est fixe**, et un autre référentiel $\mathcal{R}'$ **dans lequel $\mathcal{B}$ est mobile** (donc fonction de t).

- Dérivée par rapport à $\mathcal{R}$:

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{A}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \dot{A}_x(t)\,\vec{e}_x + \dot{A}_y(t)\,\vec{e}_y + \dot{A}_z(t)\,\vec{e}_z$$

- Dérivée par rapport à $\mathcal{R}'$:

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{A}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'} = \dot{A}_x(t)\,\vec{e}_x + \dot{A}_y(t)\,\vec{e}_y + \dot{A}_z(t)\,\vec{e}_z + A_x(t)\left.\frac{\mathrm{d}\vec{e}_x}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'} + A_y(t)\left.\frac{\mathrm{d}\vec{e}_y}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'} + A_z(t)\left.\frac{\mathrm{d}\vec{e}_z}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'}$$

donc
$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{A}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{A}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} + A_x(t)\left.\frac{\mathrm{d}\vec{e}_x}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'} + A_y(t)\left.\frac{\mathrm{d}\vec{e}_y}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'} + A_z(t)\left.\frac{\mathrm{d}\vec{e}_z}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'}$$

PROPRIÉTÉ : A priori $\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{A}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'} \neq \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{A}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}}$.

CONCLUSION : **Pour une fonction vectorielle, on précise toujours le référentiel par rapport auquel on dérive**[a] : $\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{A}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}}$

a. On n'utilise donc jamais la notation simplifiée avec un point au dessus du vecteur...

PROPRIÉTÉ : Si $\mathcal{R}'$ est **en translation** par rapport à $\mathcal{R}$, alors la base $\mathcal{B}$ fixe dans $\mathcal{R}$ est aussi fixe dans $\mathcal{R}'$, donc on a **dans ce cas uniquement**

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{A}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{A}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}}.$$

REMARQUE : On montre en cours de SI qu'il existe un *vecteur rotation* de $\mathcal{R}$ par rapport à $\mathcal{R}'$, noté $\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}'}$, qui vérifie pour $\mathcal{B} = (\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ fixe dans $\mathcal{R}$:

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{e_x}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'} = \overrightarrow{\Omega} \wedge \vec{e_x} \quad , \quad \left.\frac{\mathrm{d}\vec{e_y}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'} = \overrightarrow{\Omega} \wedge \vec{e_y} \quad \text{et} \quad \left.\frac{\mathrm{d}\vec{e_z}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'} = \overrightarrow{\Omega} \wedge \vec{e_z}$$

ce qui conduit à la formule de changement de référentiel (*formule de Bour*)[1] :

$$\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{A}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{A}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} + \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}'} \wedge \overrightarrow{A}}$$

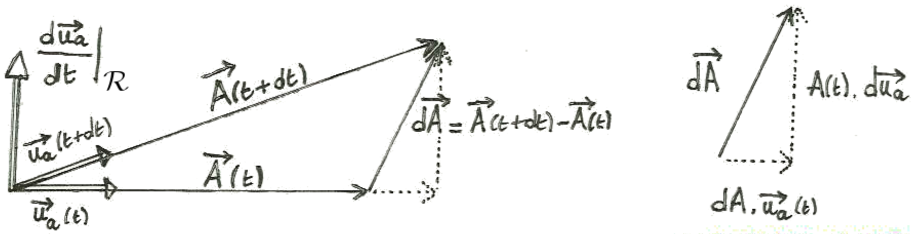
c. *Utilisation des vecteurs unitaires (de norme constante)*

PROPRIÉTÉ : Dérivation de $\overrightarrow{A}(t) = A(t)\,\vec{u}_a$ avec $||\vec{u}_a|| = 1 =$constante.

$$\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{A}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \underbrace{\dot{A}(t)\,.\,\vec{u}_a}_{\text{Allongement}} + A(t)\,.\underbrace{\left.\frac{\mathrm{d}\vec{u}_a}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}}}_{\text{Rotation}}}$$

La dérivée d'un vecteur peut toujours se décomposer en la somme :

- d'un terme exprimant son **changement de norme** (*Allongement*) ;
- d'un terme exprimant son **changement de direction** (*Rotation*), car $\vec{u}_a\,.\left.\frac{\mathrm{d}\vec{u}_a}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = 0$.



1. Les changements de référentiel n'étant pas spécifiquement abordés en SUP, cette formule ne sera pas utile cette année.

II. Vitesse et accélération

On se place dans un référentiel $\mathcal{R}$, muni d'un repère cartésien fixe de centre O et de base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ (en abrégé, $\mathcal{R} = (O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$).

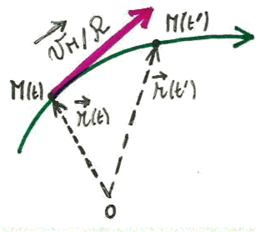
DÉFINITION : La position du point matériel à l'instant t est repérée par le *vecteur position* [a]

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}(t) = x(t)\,\vec{u}_x + y(t)\,\vec{u}_y + z(t)\,\vec{u}_z\,.$$

a. Pour alléger les notations, on omettra souvent d'écrire (t) gardant implicite la dépendance en temps.

II.1. Vitesse

DÉFINITION : Le vecteur vitesse indique **comment varie le vecteur position** au cours du temps par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$. Il représente le **mouvement** observé dans $\mathcal{R}$. On le définit de façon instantanée à l'instant t par



$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \lim_{t'\to t} \frac{\overrightarrow{M(t)M(t')}}{t'-t} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}}$$

PROPRIÉTÉS :

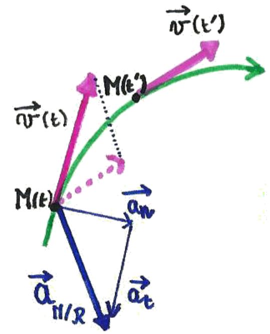
- $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$ est **tangent à la trajectoire** :
  $\boxed{\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = v.\vec{u}_t}$ avec $v = ||\vec{v}_{M/\mathcal{R}}|| > 0$ et $||\vec{u}_t|| = 1$.
  Ainsi, $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$ indique la *direction* et le *sens* du déplacement.
- $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$ **dépend du choix du référentiel** $\mathcal{R}$.
- $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$ **ne dépend pas du choix du point fixe** O de référence : si O' est aussi fixe dans $\mathcal{R}$, on a par la relation de Chasles
$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O'O}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} + \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{0} + \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}}\,.$$
- $v = ||\vec{v}_{M/\mathcal{R}}||$ s'exprime en m.s^{-1}.

THÉORÈME : **Vitesse dans la base cartésienne**
Si $\mathcal{R} = (O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ et $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{u}_x + y\,\vec{u}_y + z\,\vec{u}_z$ alors

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \dot{x}\,\vec{u}_x + \dot{y}\,\vec{u}_y + \dot{z}\,\vec{u}_z$$

II.2. Accélération

DÉFINITION : Le vecteur accélération indique **comment varie le vecteur vitesse** au cours du temps par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$. Il représente **l'évolution (le changement) du mouvement** observé dans $\mathcal{R}$. On le définit de façon instantanée à l'instant t par



$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \lim_{t'\to t} \frac{\vec{v}(t') - \vec{v}(t)}{t'-t} = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{M/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}\right|_{\mathcal{R}}$$

PROPRIÉTÉS :

- Puisque $\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = v\,\vec{u}_t$, alors

$$\boxed{\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{a}_t + \vec{a}_n \quad \text{avec} \quad \vec{a}_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\vec{u}_t = \dot{v}\,\vec{u}_t \quad \text{et} \quad \vec{a}_n = v\left.\frac{\mathrm{d}\vec{u}_t}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}}}$$

  → $\vec{a}_t$: *accélération tangentielle* (changement de **norme de la vitesse**) ;
  → $\vec{a}_n$: *accélération normale* (changement de **direction de la vitesse**).
- $\vec{a}_t$ a le même sens que $\vec{v}$ si le véhicule « accélère », le sens contraire s'il *freine*.
- $\vec{a}_n$ est dirigé **vers la concavité** de la courbe ; il indique **dans quel sens le mobile tourne**.
- $\vec{a}_{M/\mathcal{R}}$ **dépend du choix du référentiel** $\mathcal{R}$.
- $a = ||\vec{a}_{M/\mathcal{R}}||$ s'exprime en m.s^{-2}.

THÉORÈME : **Accélération dans la base cartésienne**
Si $\mathcal{R} = (O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ et $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{u}_x + y\,\vec{u}_y + z\,\vec{u}_z$ alors

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \ddot{x}\,\vec{u}_x + \ddot{y}\,\vec{u}_y + \ddot{z}\,\vec{u}_z$$

II.3. Mouvements particuliers

DÉFINITIONS :

- Mouvement **rectiligne** : le vecteur vitesse a une direction constante.

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = v\,\vec{u}_t \quad \text{avec} \quad \vec{u}_t = \overrightarrow{\text{constante}}\,.$$

- Mouvement **uniforme** : la norme de la vitesse est constante.

$$||\vec{v}_{M/\mathcal{R}}|| = v = \text{constante}\,.$$

- Mouvement **circulaire** (de centre O) $\Leftrightarrow OM = \text{constante}$.

Exemples :

- Mouvement **rectiligne uniforme** : le vecteur vitesse est constant, l'accélération est nulle.

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = v_0\,\vec{u}_t \quad \text{avec} \quad \vec{u}_t = \overrightarrow{\text{cte}} \quad \text{et} \quad v_0 = \text{cte} \Longrightarrow \vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{0}.$$

- Mouvement **circulaire uniforme** : $\vec{a}_t = \vec{0}$ mais $\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{a}_n \neq \vec{0}$.
  Le vecteur vitesse tourne donc le mouvement est accéléré !

III. Coordonnées et bases non cartésiennes

III.1. Coordonnées et base de projection cylindro-polaire

a. Coordonnées

b. Base locale de projection et déplacement élémentaire

c. Expressions de la vitesse et de l'accélération

III.2. Coordonnées et base de projection sphérique

a. Coordonnées

b. Base locale de projection et déplacement élémentaire

c. Expressions de la vitesse et de l'accélération

IV. Etude d'un mouvement - d'une trajectoire

IV.1. Méthode générale de tracé d'une trajectoire

PRINCIPE : le vecteur dérivé du vecteur position (vecteur vitesse lorsque la variable est le temps) donne la direction du mouvement car il est tangent à la trajectoire.

DÉFINITION : **Point singulier** d'une courbe paramétrée (MATHS).
Point tel que la dérivée du vecteur position soit nulle.
En particulier : lorsque la variable est le temps, **le vecteur vitesse s'annule**.

CONSÉQUENCE : En présence d'un point singulier, on doit chercher la direction du mouvement d'une façon spécifique (cf ci-dessous).

a. loi horaire : forme paramétrée par le temps

DÉFINITION : **Loi horaire**
c'est la fonction $t \to (x(t), y(t), z(t))$, qui fournit une équation de la trajectoire paramétrée par la variable temps.
Autres formes : $(r(t), \theta(t), z(t))$ ou encore $(r(t), \theta(t), \varphi(t))$.

REMARQUE : En règle générale, l'application des théorèmes de dynamique conduit directement à des *lois horaires*.

TRAJECTOIRE VIA LA LOI HORAIRE

➔ Etude des variations des fonctions coordonnées $(x(t), y(t), z(t))$ (ou $(r(t), \theta(t), z(t))$ ou encore $(r(t), \theta(t), \varphi(t))$).

➔ Le calcul du vecteur vitesse donne la tangente aux instants intéressants.

➔ Si le point est singulier (vitesse nulle), la tangente est alors obtenue par la direction limite de la vitesse :
- limite du rapport des 2 composantes de $\vec{v}$; ;
- développement limité de $\overrightarrow{OM}(t)$: $\overrightarrow{OM} \approx \overrightarrow{OM}_0 + \frac{1}{2}\vec{a}(t_0).(t-t_0)^2$ (ou pousser encore plus loin le développement si l'accélération est nulle).

REMARQUE : 2 types de trajectoires sont possibles :
- **Trajectoire plane** : on la dessine dans son plan.
- **Trajectoire non plane** : on en dessine les projections dans des plans judicieusement choisis (ex : plans cartésiens). Une représentation 3D peut être obtenue à l'aide d'un logiciel de calcul (ex : python-numpy-matplotlib).

b. Forme intrinsèque

DÉFINITION : **Equation intrinsèque** (de la trajectoire de M) : c'est l'équation vérifiée par les coordonnées (x, y, z) lorsqu'on peut éliminer la variable temps. Elle peut prendre deux formes :
- **Implicite** : $\boxed{F(x,y) = 0 \quad \text{et} \quad G(y,z) = 0}$ (ou autre combinaison).
  ex : $x^2 + y^2 = R^2$ (cercle) ; $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (hyperbole).
- **Explicite** : $\boxed{y = f(x) \quad \text{et} \quad z = g(x)}$ (ou autre combinaison).

TRAJECTOIRE VIA L'ÉQUATION INTRINSÈQUE

Cartésiennes :
- Explicite - exemple $y = f(x)$:
  ➔ Etude des variations $y = f(x)$;
  ➔ $\vec{v} = \dot{x}\,(\vec{e}_x + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,\vec{e}_y)$, donc $\boxed{\overrightarrow{T} = \frac{1}{\dot{x}}\,\vec{v} = \vec{e}_x + f'(x)\,\vec{e}_y}$ est un vecteur tangent (fait office de vecteur vitesse, modulo le signe de $\dot{x}$...).
  ➔ Recherche des points particuliers (dont singuliers) avec tangentes.
- Implicite : on peut en général expliciter par morceaux la trajectoire... Si $\boxed{F(x,y) = 0}$: le vecteur gradient $\overrightarrow{\mathrm{grad}}F$ est orthogonal à la trajectoire... cf cours de MATHS sur les fonctions de plusieurs variables.

Cylindro-polaires : en général une relation paramétrée par θ : $\boxed{r = f(\theta) \quad \text{et} \quad z = g(\theta)}$.

➔ Etudier les variations de $r(\theta)$ $(z(\theta))$;

➔ $\boxed{\overrightarrow{T} = \frac{1}{\dot{\theta}}\,\vec{v} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\,\vec{e}_r + r(\theta)\,\vec{e}_\theta\ (+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\theta}\,\vec{e}_z)}$ est un vecteur tangent.

➔ Recherche des points particuliers (dont singuliers) avec tangentes.

Sphériques : conduit à une relation paramétrée $\boxed{(r = f(\varphi), \theta = g(\varphi))}$ (ou $(r(\theta), \varphi(\theta))$) :

➔ Etudier les variations de $r(\varphi)$ et $\theta(\varphi)$;

➔ $\boxed{\overrightarrow{T} = \frac{1}{\dot{\varphi}}\,\vec{v} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\,\vec{e}_r + r\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\varphi}\,\vec{e}_\theta + r\,\sin\theta\,\vec{e}_\varphi}$ est un vecteur tangent.

➔ Recherche des points particuliers (dont singuliers) avec tangentes.

IV.2. Mouvement reciligne uniforme

IV.3. Mouvement uniformément accéléré

IV.4. Mouvement circulaire