MÉCANIQUE

CALCULATRICES AUTORISÉES

I. Expériences à l'aide d'ondes de surface dans l'eau

On étudie des ondes à la surface de l'eau produites par une source rectiligne ou ponctuelle. Le milieu est supposé infini donc sans phénomène de réflexion.

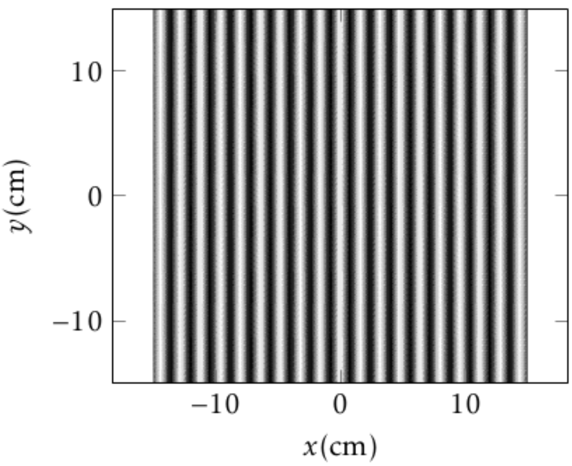
I.1. Source rectiligne

On considère une barre située à l'abscisse $x = -15\,\text{cm}$ émettant à l'aide d'un vibreur une onde sinusoïdale de fréquence notée ν se propageant à la surface de l'eau. La surface de l'eau à un instant donné a l'allure représentée sur la figure ci-dessous, dans laquelle les zones claires représentent une crête et les zones sombres un creux.

1. Déterminer la célérité des ondes si la fréquence $\nu = \nu_1 = 14,5\,\text{Hz}$. On supposera dans toute la suite que cette célérité, notée c, reste constante quand la pulsation varie.

2. Donner l'expression de la perturbation notée s de la surface de l'eau en fonction de x, c, t, ν pour tout $x \in [-15\,\text{cm}; 15\,\text{cm}]$, pour une onde d'amplitude S_0 telle que la phase en $x = 0$ à $t = 0$ soit nulle.

3. On déplace la source en $x = x_0 = 5\,\text{cm}$. Donner de nouveau l'expression de $s(x,t)$, pour tout $x \in [-15\,\text{cm}; 15\,\text{cm}]$.



I.2. Source ponctuelle

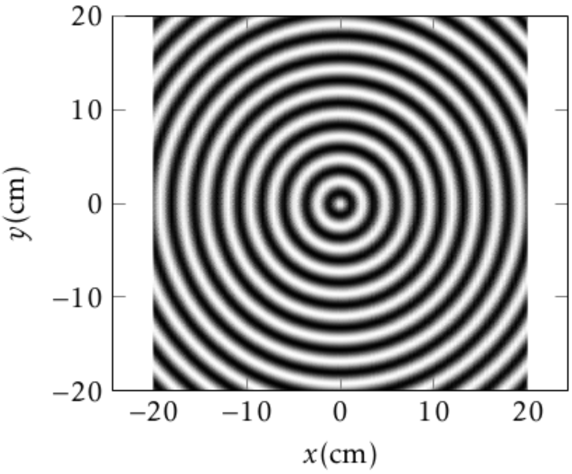
La surface est maintenant excitée par les oscillations d'un vibreur ponctuel et a l'allure observée ci-dessous.

Dans la simulation on a négligé la diminution de l'amplitude avec la distance de propagation pour améliorer le contraste des images.

4. Déterminer la nouvelle fréquence, notée ν_2, du signal.

5. Représenter l'allure de la surface de l'eau si la pulsation du signal est deux fois plus faible.

6. Donner l'expression de s en fonction de x, y, t, ν, c si l'onde a une phase nulle à $t = 1/(2\nu)$ en $(x = 0; y = 0)$.



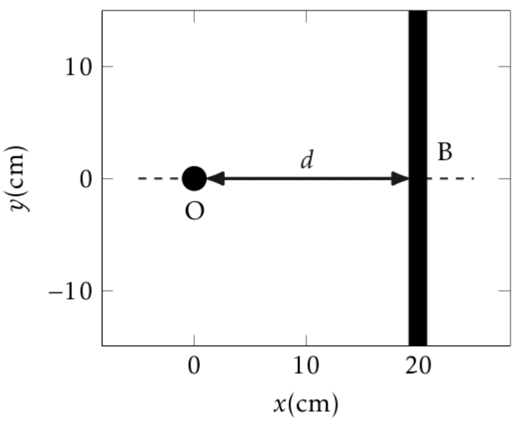
I.3. Superposition de deux ondes

La surface est désormais excitée par les vibrations conjointes de la source ponctuelle et de la barre, de mêmes amplitudes. Ces vibrations sont synchrones, en phase, de fréquence $\nu_0 = 10\,\text{Hz}$. La distance entre la source ponctuelle et la barre est notée d.

7. Déterminer l'expression puis la nature de l'onde sur le segment $[OB]$. Comment qualifie-t-on cette onde ? On précisera la valeur de sa longueur caractéristique.

8. Quel déphasage φ faudrait-il introduire entre les oscillations de la barre et du point qui permette d'échanger les positions des nœuds et des ventres sur le segment $[OB]$?

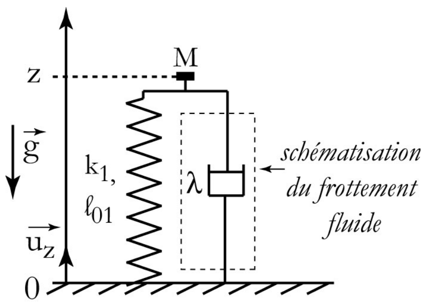
9. Déterminer le lieu des points M de coordonnées $(x; y)$ (ie une expression reliant x et y) tels que le déphasage entre l'onde issue de O et celle issue de la barre soit égal à π. Représenter l'allure de ce lieu.



II. Étude des suspensions dans une voiture

II.1. Amortisseurs de roues

On considère une voiture de masse à vide M, que l'on assimilera à une masse ponctuelle. La position de la voiture est repérée au cours du temps t par sa cote $z(t)$ sur l'axe vertical ascendant Oz. On ne s'intéresse qu'aux mouvements verticaux de la voiture.



La suspension des roues de la voiture peut être modélisée par :

— un ressort de masse négligeable, de raideur k_1 et de longueur à vide ℓ_{01}

— un amortisseur de masse négligeable qui exerce sur la voiture une force de frottements

$$\overrightarrow{F_\lambda} = -\lambda \dot{z}\, \overrightarrow{u_z}$$

où λ est le coefficient de frottement fluide.
On note $\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{u_z}$ le champ de pesanteur.

1. **a)** Déterminer la position d'équilibre z_0 de la voiture.

b) La voiture est écartée de sa position d'équilibre. Établir l'équation différentielle satisfaite par $Z(t) = z - z_0$, l'écart de la voiture par rapport à sa position d'équilibre.

2. Approche énergétique.

a) Calculer l'énergie mécanique E_m du système.

b) Retrouver l'équation différentielle obtenue précédemment par un raisonnement énergétique.

3. Le constructeur automobile fabrique la suspension pour que, lorsque la voiture est vide, le régime d'amortissement des oscillations soit critique. Déterminer alors le coefficient de frottements λ de l'amortisseur, en fonction de k_1 et M.

Quatre passagers montent à l'intérieur de la voiture, ce qui a pour effet d'abaisser la cote de la voiture. Les passagers totalisent une masse M' qui vient s'ajouter à la masse à vide M de la voiture.

4. Déterminer la position d'équilibre z_1 du système {voiture + passagers} et établir la nouvelle équation différentielle donnant le mouvement de la voiture, relativement à sa nouvelle position d'équilibre z_1. On posera pour cela $Z_1 = z - z_1$.

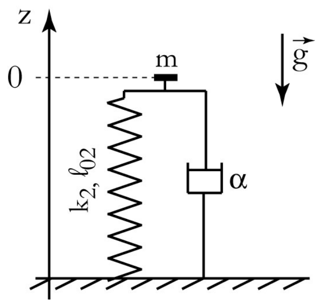
5. Quel est le régime d'amortissement lorsque la voiture est chargée des passagers ? Justifier.

6. Expliciter alors l'expression générale de $Z_1(t)$ en fonction des paramètres du problème. On ne cherchera pas à déterminer les constantes d'intégration.

7. Pour qu'une voiture soit confortable, il faut que les oscillations résultant d'un défaut de la route aient une période adaptée à l'organisme humain, comme par exemple la période de la marche, qui vaut environ 1 s. Calculer la raideur k_1 du ressort qui doit constituer la suspension, sachant que M=1500 kg et M'=300 kg.

II.2. Vibrations du moteur

On s'intéresse maintenant à la suspension du moteur, à l'intérieur de la voiture.
Lorsque le moteur fonctionne, sa rotation entraîne un déséquilibre (car la masse de celui-ci n'est pas parfaitement répartie) et donc des vibrations du châssis. Il est alors nécessaire de prévoir un système de suspension spécial pour le moteur.



Le moteur est assimilé à un point matériel de masse m dont la position est repérée par la cote z. Sauf mention du contraire, on ne s'intéresse qu'aux mouvements verticaux du moteur, donc en supposant la voiture (son chassis) fixe par rapport à la route. L'origine de l'axe Oz, vertical ascendant, est choisie comme étant la position du moteur lorsque celui-ci ne fonctionne pas (masse m immobile).
Comme dans la partie précédente, la suspension est modélisable par un ressort et un amortissement fluide. Le ressort a ici une raideur k_2 et une longueur à vide l_{02}, placé en parallèle avec un amortisseur qui exerce cette fois une force de freinage $\overrightarrow{F_\alpha} = -\alpha \dot{z} \overrightarrow{u_z}$ sur le moteur, avec α une constante.

Lorsque le moteur fonctionne, tout se passe comme s'il apparaissait une force supplémentaire de la forme $\overrightarrow{F} = F_0 \cos(\omega t) \overrightarrow{u_z}$, d'amplitude F_0 et de pulsation ω.

8. Déterminer la longueur à l'équilibre ℓ_{eq} du ressort lorsque le moteur ne fonctionne pas.

9. Établir l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$ lorsque le moteur fonctionne. La mettre sous forme canonique en introduisant la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q.

10. En régime sinusoïdal établi, on recherche les solutions de la forme $z(t) = Z_0 \cos(\omega t + \varphi)$ et $v(t) = \dot{z} = V_0 \cos(\omega t + \psi)$. Calculer V_0 en fonction de ω et des paramètres du problème. Tracer l'allure de $V_0(\omega)$.

11. Le moteur en fonctionnement tourne à des vitesses angulaires variant entre 6000 tr/min (tours par minute) et 35000 tr/min. Sa masse est $m = 200$ kg et on dispose de deux ressorts de raideur $k_{2,1} = 64.10^6$ N/m et $k_{2,2} = 16.10^6$ N/m. Lequel faut-il choisir pour réaliser la suspension ? Justifier.

12. On prend maintenant en compte que la voiture (et donc son châssis) bouge aussi par rapport au sol, comme étudié en première partie. L'ensemble { voiture + moteur } peut donc être modélisé par un système de deux masses reliées par un ressort de raideur k_2, le tout soutenu par un ressort de raideur k_1.
Pensez-vous que les résultats présentés précédemment sont notablement modifiés ? Pourquoi ?

III. Principe du magnétron

Un magnétron est un dispositif qui transforme l'énergie cinétique des électrons en énergie électromagnétique, sous forme de micro-ondes. Il s'agit d'un tube à vide sans grille d'arrêt, où les électrons émis par une cathode centrale cylindrique se dirigent vers une anode externe coaxiale, mais sont déviés par un champ magnétique axial en une trajectoire en spirale. L'interaction entre le faisceau d'électrons et l'anode produit l'onde électromagnétique, notamment grâce des cavités résonnantes creusées dans l'anode (cf Figs.(1)-(2) [1 2]*). Le développement du magnétron a été crucial dans celui du radar et donc dans le déroulement de la Seconde Guerre mondiale. Depuis, il s'est répandu dans d'autres domaines, notamment l'électroménager avec le four à micro-ondes.*

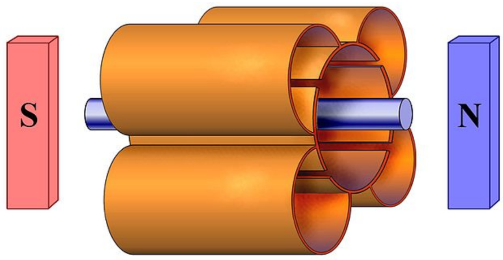


FIGURE 1 – Magnétron à quatre cavités de Hans E. Hollmann de 1935.

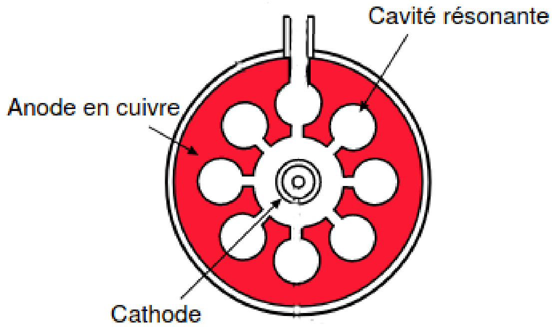


FIGURE 2 – Section transversale d'un magnétron à cavités moderne.

On modélise le magnétron simplement comme deux électrodes cylindriques de rayons $r = a$ et $r = b > a$ entre lesquelles règne un champ magnétique $\vec{B}_0 = B_0\,\vec{u}_z$ et un champ électrique $\vec{E} = -\frac{K}{r}\,\vec{u}_r$, où $K > 0$ et $B_0 > 0$ sont des constantes. Des électrons, de masse m et de charge $q = -e$, sont émis à vitesse négligeable au niveau de l'électrode centrale ($r = a$). Ce problème étudie la suite de leur mouvement. On rappelle qu'en présence d'un champ électrique $\vec{E}$, une charge électrique q est soumise à la force électrique $\vec{F}_e = q\vec{E}$. En présence d'un champ magnétique $\vec{B}$, une charge électrique q de vitesse $\vec{v}$ est soumise à la force magnétique $\vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B}$.

1. En utilisant le principe fondamental de la dynamique, montrer que le mouvement est plan, dans un plan perpendiculaire à $\vec{B}$. On utilisera par la suite les coordonnées polaires dans ce plan.
2. Le système est-il conservatif ? Si oui établir l'expression de son énergie potentielle E_p.
3. En déduire l'expression de son énergie mécanique totale E_m en fonction des degrés de liberté r et θ et de leur dérivée. Que vaut cette énergie d'après les conditions initiales ?
4. En appliquant le théorème du moment cinétique selon l'axe Oz, établir une seconde intégrale première du mouvement. La loi des aires est-elle vérifiée ? Pourquoi ?
5. En déduire que l'électron peut être vu comme un système à un degré de liberté r évoluant dans une énergie potentielle effective $E_{p_{\text{eff}}}(r)$ dont on établira l'expression.
6. Représenter l'allure de $E_{p_{\text{eff}}}(r)$ et en déduire des propriétés sur le mouvement.
7. Comment faut-il choisir B_0 pour que tous les électrons reviennent sur l'électrode centrale sans être entrés en contact avec l'électrode périphérique ?
8. Déterminer, dans le cas limite où la trajectoire d'un électron est tangente à cette électrode périphérique, sa vitesse angulaire ω au moment où il la frôle. On donne alors $B_0 = 0,5\,\text{T}$, avec $e = 1,6 \times 10^{-19}\,\text{C}$, $m = 9,1 \times 10^{-31}\,\text{kg}$, $a = 1\,\text{cm}$ et $b - a = 1\,\text{mm}$. Déterminer la fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi}$ du rayonnement électromagnétique qui en résulte.

* * * FIN DE L'ÉPREUVE * * *

1. Par Christian Wolff - Travail personnel (eigene Zeichnung), CC BY-SA 3.0, `https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=17810642`
2. Par Resonant_Cavity_Magnetron_Diagram.svg : Vanessa Ezekowitz derivative work : Pierre_cb - Resonant_Cavity_Magnetron_Diagram.svg, CC BY-SA 3.0, `https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=17775374`