

CB 1 de PHYSIQUE PCSI 1, 2 et 3

CORRECTION

I Objectif photographique bifocal

Partie 1 : questions préliminaires

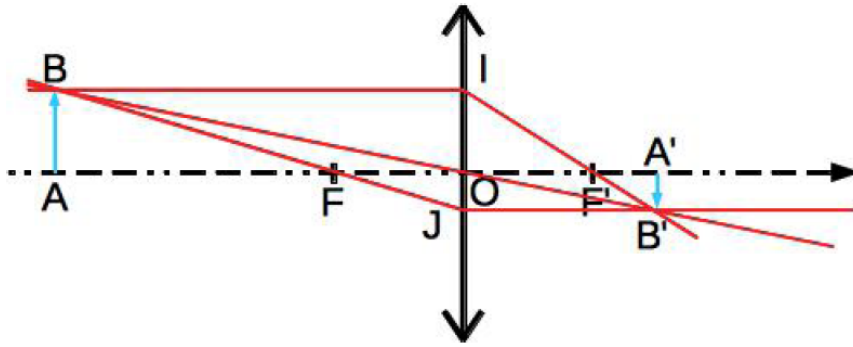


FIGURE 1 – Relation de conjugaison et de grandissement d'une lentille

1. On a tracé trois rayons sur la figure 1 :

- l'un passant par B et le centre optique et qui ressort non dévié
- l'un passant par B et F et qui ressort parallèle à l'axe optique
- l'un passant par B et parallèle à l'axe optique, il ressort en passant par F'

Deux rayons suffisent.

On observe ainsi que les triangles ABO et A'B'O sont semblable donc :

$$\boxed{\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}} \quad (1)$$

On obtient la relation de grandissement demandée.

De plus, ABF et FOJ sont aussi semblable donc $\frac{\overline{FO}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{OJ}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$. Il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\overline{FO}}{\overline{FO} + \overline{OA}} &= \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \\ \overline{FO} \overline{OA} &= \overline{FO} \overline{OA'} + \overline{OA} \overline{OA'} \\ \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} &= \frac{1}{\overline{FO}} = \frac{1}{\overline{OF'}} \end{aligned}$$

2. (a) A étant à l'infini, l'image intermédiaire se forme en F'_1 foyer principal image de la première lentille. A' est donc donné par la relation de conjugaison pour L_2 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\overline{O_2 A'}} - \frac{1}{\overline{O_2 F'_1}} &= \frac{1}{f'_2} \\ \overline{O_2 A'} &= \frac{1}{\frac{1}{f'_1 - d} + \frac{1}{f'_2}} = \frac{f'_2(f'_1 - d)}{f'_2 + f'_1 - d} \end{aligned}$$

(b) Notons que A' correspond au foyer principal image de l'ensemble et que O_1 et O_2 étant confondu, ce point est assimilable au centre optique (O_1 est l'image de O_1 par les deux

lentilles), donc O_2A' est la distance focale du système équivalent. Il vient en inversant la relation précédente que :

$$\boxed{\frac{1}{O_2A'} = \frac{1}{f_1'} + \frac{1}{f_2'}} \quad (2)$$

(c) On écrit les deux relations de conjugaison pour les lentilles en notant A_1 l'image intermédiaire :

$$\frac{1}{O_2A'} - \frac{1}{O_2A_1} = \frac{1}{f_2'}$$

$$\frac{1}{O_1A_1} - \frac{1}{O_1A} = \frac{1}{f_1'}$$

En sommant les deux équations avec $O_1 = O_2$, il vient :

$$\boxed{\frac{1}{O_1A'} - \frac{1}{O_1A} = \frac{1}{f_1'} + \frac{1}{f_2'}} \quad (3)$$

soit la relation de conjugaison d'une lentille de centre optique O_1 et de distance focale donnée par la relation 2

Partie 2 : étude simplifiée d'un objectif photographique bifocal

3. (a) En utilisant la relation établie précédemment :

$$\boxed{O_1F'_{12} = \frac{f_1'f_2'}{f_1' + f_2'} = 84\text{mm}} \quad (4)$$

C'est donc une lentille convergente.

(b) Dans ces conditions, l'image d'un objet à l'infini donne une image à l'infini. Or l'image intermédiaire est alors à la fois dans le plan focal image de L_{12} et dans le plan focal objet de L_3 , donc :

$$\boxed{O_1O_3 = O_1F'_{12} + F'_{12}O_3 = O_1F'_{12} + F_3O_3 = \frac{f_1'f_2'}{f_1' + f_2'} + f_3' = 24\text{mm}} \quad (5)$$

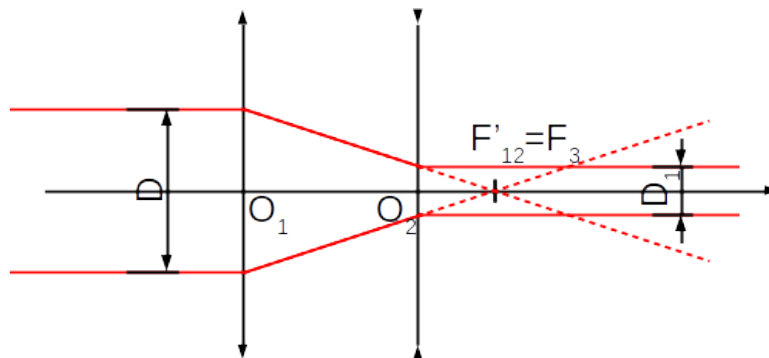


FIGURE 2 – Faisceau étudié

(c) Cf. Figure 2, il vient :

$$\boxed{\gamma_1 = \frac{F_3O_2}{F'_{12}O_1} = \frac{f_3'(f_1' + f_2')}{f_1'f_2'} = 0.71} \quad (6)$$

- (d) Pour tout objet, on peut tracer un rayon parallèle à l'axe optique passant par B (B hors de l'axe optique). Il ressortira parallèle à l'axe optique et le rapport des distance de ces deux rayons à l'axe optique correspondra au grandissement. Donc le grandissement sera toujours γ_1 .
4. (a) Par retour inverse de la lumière, on retrouve exactement la situation étudiée «position 1». Le système est donc à nouveau afocal.
- (b) L'ensemble $L_2 + L_3$ est équivalent à une lentille de distance focale $f'_{23} = \frac{f'_2 f'_3}{f'_3 + f'_2}$ et l'écart entre les deux lentilles vaut :

$$e = f'_3 + \frac{f'_1 f'_2}{f'_1 + f'_2}$$

$$= f'_1 + \frac{f'_3 f'_2}{f'_3 + f'_2}$$

car $f'_1 = f'_3$. Alors

$$\gamma_2 = \frac{f'_{23}}{f'_1} = \frac{f'_{12}}{f'_3} = \frac{1}{\gamma_1} = 1.4 \tag{7}$$

On pouvait aussi raisonner directement par retour inverse de la lumière, ce qui donne $\gamma_2 = \frac{1}{\gamma_1}$.

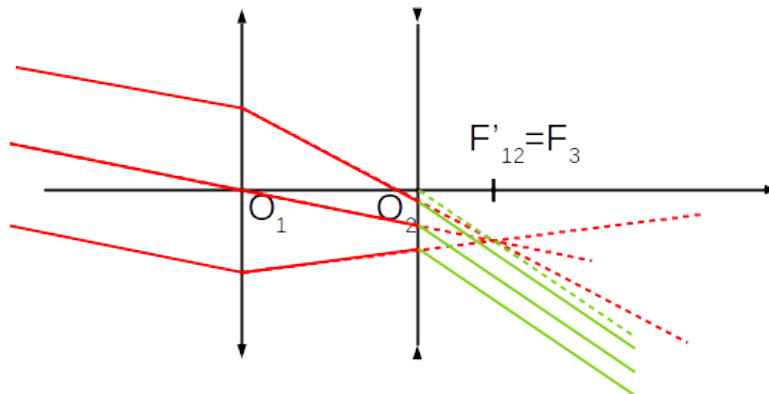


FIGURE 3 – Faisceau incline

5. (a) cf. Figure 3
- (b) En notant $A'B'$ la taille de l'image intermédiaire, on observe que :

$$A'B' = O_1 F'_{12} \tan \alpha = O_3 F_3 \tan \alpha'$$

Il vient :

$$G_1 = \frac{\alpha'}{\alpha} \approx \frac{\tan \alpha'}{\tan \alpha} = \frac{f'_{12}}{f'_3} = \frac{f'_2}{f'_1 + f'_2} = 1.4 \tag{8}$$

On a utilisé le fait que $f'_1 = f'_3$

(c) $G_1 = \frac{1}{\gamma_1}$

- (d) Par un raisonnement analogue, il vient que :

$$G_2 = \frac{1}{\gamma_2} = \frac{f'_1 + f'_2}{f'_2} = 0.71 \tag{9}$$

6. (a) On doit placer le capteur CCD dans le plan focal image de L_4 . La distance entre L_3 et L_4 n'a pas d'importance d'un point de vue du stigmatisme car l'objet avant L_4 est à l'infini.

Accepté : placer L_4 au plus proche de L_3 permet de récupérer un maximum de rayon et augmente le champ d'observation.

- (b) Il faut accoler L_3 et L_4 . Il vient que l'encombrement vaut :

$$\boxed{enc = e + f'_4 = f'_3 + \frac{f'_1 f'_2}{f'_1 + f'_2} + f'_4 = 74\text{mm}} \quad (10)$$

- (c) Dans les deux configurations, $\overline{A'B'} = f'_4 \tan \alpha'$ donc :

— Configuration 1 : $\overline{A'B'} \approx G_1 f'_4 \alpha = 74\mu\text{m}$

— Configuration 2 : $\overline{A'B'} \approx G_2 f'_4 \alpha = 31\mu\text{m}$

- (d) Il vient :

$$f'_{config1} = G_1 f'_4 = 70\text{mm}$$

$$f'_{config2} = G_2 f'_4 = 36\text{mm}$$

II Multivibrateur à dipôle en N

Partie 1 : analyse qualitative graphique du circuit

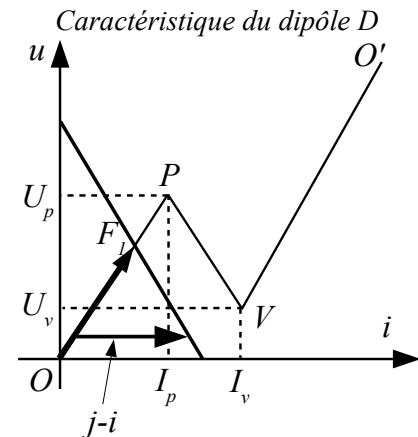
Attention : aucun calcul n'est demandé dans cette partie, il faut néanmoins justifier vos réponses.

- Loi des mailles dans la maille élémentaire de gauche : $E - Rj(t) = u(t)$.
Equation du condensateur : $Cu'(t) = j(t) - i(t)$.
- La tension $u(t = 0^+)$ étant nulle, la caractéristiques du dipôle D nous permet d'écrire que $i(0^+) = 0$. On a de plus : $j(0^+) = E/R$ (équation écrite en 1) et il vient donc : $u'(0^+) = \frac{E}{RC}$.
La tension $u(t)$ va donc augmenter à partir de $t = 0^+$.

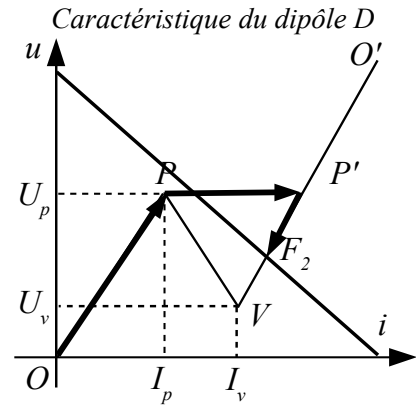
3. (a) cf. ci-contre.

- (b) On a vu que la tension $u(t)$ commençait par augmenter. Il apparaît sur le graphique que la grandeur $j(t) - i(t)$ reste positive tant qu'on atteint pas F_1 : $u(t)$ va donc augmenter jusqu'en F_1 . Au point F_1 , il vient $j - i = 0$: donc la dérivée $u'(t)$ est nulle : la tension ne varie plus, on a atteint le régime permanent. Le point de fonctionnement va donc parcourir le segment OF_1 .

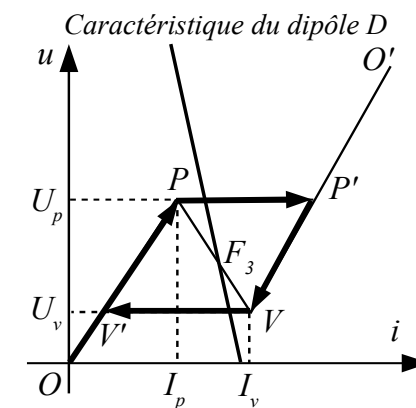
- (c) cf. ci-contre.



4. (a) cf. ci-contre.
 (b) Dans un premier temps, le raisonnement fait dans la partie précédente est toujours valable, $u(t)$ va augmenter jusqu'en P (car $j - i$ est toujours positif). En P , la tension aux bornes du condensateur étant continue, il ne peut y avoir de saut de tension, par contre, i n'est pas nécessaire continue, le point de fonctionnement va donc «sauter» en P' . Il apparaît alors que l'intensité $j - i$ devient négative : la tension $u(t)$ va donc décroître à partir de P' jusqu'à ce que $j - i$ s'annule soit au point de fonctionnement F_2 .



5. (a) cf. ci-contre.
 (b) Partant de F_3 , on augmente légèrement la tension $u(t)$ (donc i diminue). On voit que l'intensité j est alors supérieure à i : $j - i$ est positif et la tension $u(t)$ va continuer à augmenter : on s'éloigne de F_3 . On peut faire le même raisonnement en diminuant $u(t)$, $j - i$ devient négatif et la tension va continuer à diminuer. Le point F_3 est donc instable.
 (c) Le raisonnement réalisé à la question précédente est encore valable mais cette fois, on atteint V et l'intensité $j - i$ est toujours négative. Le même raisonnement sur la continuité de $u(t)$ montre que le point de fonctionnement va «sauter» vers V' . On se retrouve alors dans le premier cas et le point de fonctionnement va à nouveau tendre vers P . Le point de fonctionnement en régime permanent F_3 ne sera jamais atteint.



6. Pour que le dipôle oscille, il faut que la caractéristique du dipôle en N et la caractéristique du dipôle de Thévenin (E, R) ne se coupent qu'une seule fois entre P et V . On peut établir comme condition nécessaire à ce cas de figure :

$$\begin{cases} u_{Thevenin}(I_P) > u_D(I_P) \\ u_{Thevenin}(I_V) < u_D(I_V) \end{cases} \implies \begin{cases} E - RI_P > U_P \\ E - RI_V < U_V \end{cases} \implies \frac{E - U_V}{I_V} < R < \frac{E - U_P}{I_P}$$

Remarque : On peut observer que cette condition en impose une autre sur E :

$$\frac{E - U_V}{I_V} < \frac{E - U_P}{I_P} \implies \frac{I_V U_P - I_P U_V}{I_V - I_P} < E$$

(ceci n'était pas demandé dans la question.)

Partie 2 : recherche de la période d'oscillation

7. On a les équations :

$$\begin{aligned} E - Rj(t) &= u(t) \text{ (lois des mailles)} \\ Cu'(t) &= j(t) - i(t) \text{ (équation caractéristique du condensateur + loi des nœuds)} \\ i(t) &= \frac{I_P}{U_P} u(t) = \frac{u(t)}{R_P} \text{ (équation caractéristique du dipôle } D \text{ sur } OP). \end{aligned}$$

Il vient l'équation différentielle :

$$Cu'(t) = \frac{E - u(t)}{R} - \frac{u(t)}{R_P} \implies u'(t) + \frac{1}{C} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_P} \right) u(t) = \frac{E}{RC}$$

C'est une équation différentielle du premier ordre avec second membre dont la solution générale est la somme de la solution générale de l'ESSM :

$$u_0(t) = Ae^{-t/\tau} \text{ avec } \tau = \frac{RR_P}{R + R_P}C = \tau_0$$

et d'une solution particulière de l'EASM que l'on cherche ici sous la forme d'une solution constante : $u_1(t) = K$. Il vient :

$$u_1(t) = \frac{E}{RC} \frac{RR_P C}{R + R_P} = E_0$$

La solution générale a donc pour forme :

$$u(t) = Ae^{-t/\tau_0} + E_0$$

A $t = 0$, $u(t) = 0$, il vient : $A = -E_0$ soit

$$u(t) = E_0 \left(1 - e^{-t/\tau_0}\right)$$

On a donc :

$$u(t_0) = U_P = E_0 \left(1 - e^{-t_0/\tau_0}\right) \implies t_0 = \tau_0 \ln \left(\frac{E_0}{E_0 - U_P}\right)$$

Remarque : Si on a fait les questions précédentes, on peut prouver que $E_0 > U_P$ et que le temps t_0 est donc bien défini.

8. Les équation précédentes restent valables excepté l'équation caractéristique du dipôle D , sur $P'V$, elle devient :

$$i(t) = \frac{u(t) - U_V}{R_V} + I_V$$

Il vient l'équation différentielle :

$$Cu'(t) = \frac{E - u(t)}{R} - \frac{u(t) - U_V}{R_V} - I_V \implies u'(t) + \frac{1}{C} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_V}\right) u(t) = \frac{E}{RC} + \frac{U_V}{R_V C} - \frac{I_V}{C}$$

La solution générale est cette fois :

$$u(t) = Be^{-t/\tau_1} + E_1$$

avec la condition initiale $u(t_0) = U_P$. D'où : $B = (U_P - E_1)e^{t_0/\tau_1}$ soit :

$$u(t) = E_1 - (E_1 - U_P)e^{-(t-t_0)/\tau_1}$$

Il vient :

$$u(t_1 + t_0) = U_V \implies t_1 = \tau_1 \ln \left(\frac{U_P - E_1}{U_V - E_1}\right)$$

Remarque : Si on a fait les questions précédentes, on peut prouver que $E_1 < U_V < U_P$ et que le temps t_1 est donc bien défini.

9. Pendant une période, le point de fonctionnement balaie les segments $[V'P]$ puis $[P'V]$. Le temps mis pour balayer $[P'V]$ a été calculé précédemment (t_1). Quant au temps mis pour balayer $[V'P]$, noté t'_0 , il suffit de remarquer que pour $t > t_1$, le point de fonctionnement balaie effectivement ce segment et l'expression de $u(t)$ est alors :

$$u(t) = E_0 - (E_0 - U_V)e^{-(t-t_0-t_1)/\tau_0}$$

En résolvant $u(t'_0 + t_1 + t_0) = U_P$, il vient :

$$t'_0 = \tau_0 \ln \left(\frac{E_0 - U_V}{E_0 - U_P}\right)$$

La période des oscillations est donc bien :

$$T = \tau_0 \ln \left(\frac{E_0 - U_V}{E_0 - U_P}\right) + \tau_1 \ln \left(\frac{U_P - E_1}{U_V - E_1}\right)$$

III Analyseur de spectre

Partie 1 : quelques généralités

1. Un système est linéaire au sens physique s'il n'est composé que d'éléments linéaires, c'est-à-dire que l'équation différentielle liant les grandeurs d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$ du système est linéaire d'un point-de-vue mathématique (principe de superposition), et à coefficients constants (invariants par translation dans le temps).

Rq : Dans ce cas on peut caractériser son fonctionnement par la réponse à un signal sinusoïdal via la fonction de transfert, et utiliser la décomposition en série de Fourier pour tout signal périodique.

Si les coefficients dépendent du temps, le système ne renverra pas forcément la même pulsation en sortie qu'en entrée, ce qui en physique est considéré comme un comportement non-linéaire.

2. (a) Toute fonction périodique $s(t)$ se décompose (décomposition en série de Fourier) en une somme de sinusoïdes (harmoniques) ayant une certaine amplitude et une certaine fréquence. Le spectre de Fourier de $s(t)$ est la représentation graphique de l'amplitude des différentes harmoniques présentes dans le signal (amplitude en fonction de la fréquence de l'harmonique).
 - (b) Un système non linéaire enrichit le spectre de Fourier. Le système 1 est donc linéaire car aucune nouvelle fréquence n'est apparue dans le spectre de $s(t)$. Il joue le rôle de filtre passe-bas (fréquence de coupure comprise entre 3 et 4 kHz).
 - (c) Le système 2 n'enrichit pas le spectre de Fourier. C'est un système linéaire de type passe-bande (centré sur 3 kHz).
Le système 3 enrichit le spectre de Fourier et est donc non-linéaire.

Partie 2 : filtre sélectif

3. Fonction de transfert.

- (a) On étudie le transfert pour une tension sinusoïdale de pulsation quelconque car cela nous permettra d'avoir la réponse du système pour n'importe quel signal d'entrée périodique. En effet, par décomposition en série de Fourier, tout signal périodique se décompose en somme de sinusoïdes. Ainsi, on peut déterminer le transfert pour toute sinusoïde. Le système étudié étant linéaire (les dipôles sont tous linéaires), on obtient sa réponse par combinaison linéaire adéquate des réponses à chaque sinusoïde.

- (b) La loi des nœuds en termes de potentiel au nœud A donne :

$$\frac{e - V_A}{R_1} + \frac{0 - V_A}{R_2} + (s - V_A)jC\omega + (V_B - V_A)jC\omega = 0$$

D'où

$$\underline{V_A} = \frac{jC\omega(s + V_B) + \frac{e}{R_1}}{2jC\omega + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

- (c) La loi des nœuds en termes de potentiel au nœud B donne :

$$\frac{s - V_B}{2R_1} + (V_A - V_B)jC\omega + i_- = 0$$

D'où

$$\underline{V_B} = \frac{\frac{s}{2R_1} + jC\omega V_A}{jC\omega + \frac{1}{2R_1}}$$

- (d) Comme $\underline{V_B} = 0$ (A.O. est idéal et en régime linéaire), il vient

$$\underline{V_A} = -\frac{s}{2jR_1C\omega}$$

Alors

$$2jR_1C\omega \left(jC\omega \underline{s} + \frac{\underline{e}}{R_1} \right) = -\underline{s} \left(2jR_1C\omega + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

$$\iff \underline{s} \left[1 + \frac{R_1}{R_2} + 2jR_1C\omega - 2(R_1C)^2\omega^2 \right] = -2jR_1C\omega \underline{e}$$

D'où :

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{-2jR_1C\omega}{\frac{R_1+R_2}{R_2} + 2jR_1C\omega - 2(R_1C)^2\omega^2} \implies \underline{H} = \frac{-1}{1 + jR_1C\omega - j\frac{R_1+R_2}{2R_1R_2C\omega}}$$

(e) On peut identifier le facteur de qualité Q et la pulsation propre ω_0 :

$$\begin{cases} \frac{Q}{\omega_0} = R_1C \\ Q\omega_0 = \frac{1}{R_eC} \end{cases} \implies \begin{cases} Q = \sqrt{\frac{R_1}{R_e}} = \sqrt{\frac{R_1+R_2}{2R_2}} \\ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1R_eC}} = \frac{1}{R_1C} \sqrt{\frac{R_1+R_2}{2R_2}} \end{cases}$$

Il s'agit là d'un filtre passe-bande d'ordre 2.

4. Étude du gain.

(a) Déterminons le module de \underline{H} :

$$H = |\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$$

H admet un maximum lorsque son dénominateur admet un minimum, c'est-à-dire lorsque $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 0$. Cela se produit pour $x = 1$, c'est-à-dire $\boxed{\omega = \omega_0}$.

(b) — Les pulsations de coupure sont atteintes lorsque H atteint son maximum ($H_{max} = 1$ ici) divisé par $\sqrt{2}$. On trouve donc les fréquences de coupure pour

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \iff Q \left(x - \frac{1}{x}\right) = \pm 1$$

— On résout alors l'équation du second degré suivante, dont les solutions sont les pulsations propres réduites :

$$x^2 \mp \frac{1}{Q}x - 1 = 0 \text{ et } \Delta = \frac{1}{Q^2} + 4 > 0$$

On obtient les pulsations de coupure :

$$x_1, x_2 = \pm \frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} \implies \omega_1, \omega_2 = \omega_0 \left[\sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} \pm \frac{1}{2Q} \right]$$

En effet, la solution en $-\sqrt{\Delta}$ est impossible car elle donnerait des valeurs négatives pour les pulsations.

— Le filtre étant un passe-bande, la bande passante est donnée par : $\boxed{B_\omega = [\omega_1, \omega_2]}$.

(c) La largeur de la bande passante est donnée par :

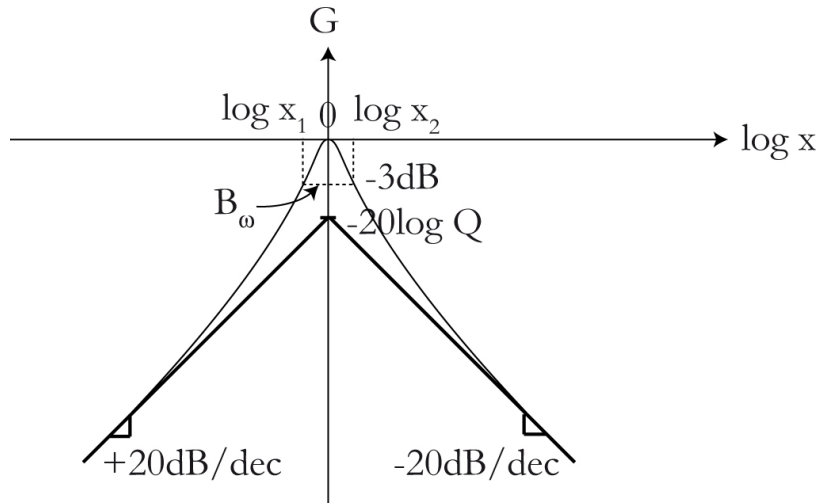
$$\boxed{\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}}$$

Ainsi le facteur de qualité traduit l'acuité de la résonance : plus le facteur de qualité Q est élevé, plus la bande passante du filtre est étroite.

(d) Déterminons les équivalents du gain décibel :

$$G = -20 \log \left(\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2} \right) \Rightarrow \begin{cases} G \sim 20 \log x - 20 \log Q & x \ll 1 \\ G \sim -20 \log x - 20 \log Q & x \gg 1 \end{cases}$$

Les asymptotes du diagramme de Bode en gain ont donc des pentes de ± 20 dB/decade et se croisent en $-20 \log Q < 0$ (car $Q > 1$ pour $R_1 > R_2$). Le gain décibel maximal est de 0, atteint pour $x = 1$. D'où le diagramme suivant :



5. Analyseur de spectre élémentaire.

(a) Déterminons la bande passante du filtre, accordé sur $f_0 = 3,0$ kHz et $Q = 20$:

$$B_f = [2,9 \text{ kHz}; 3,1 \text{ kHz}].$$

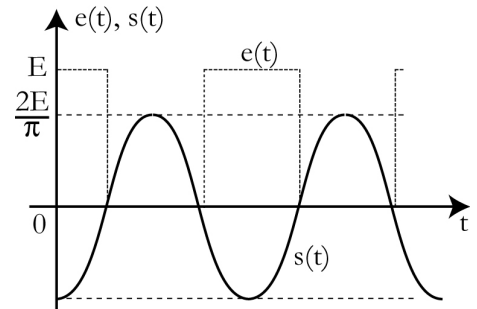
On peut donc considérer que seul l'harmonique à $f = f_0 = 3,0$ kHz est transmis. Le continu, et les harmoniques $3f, 5f$ et supérieures sont éliminées par le filtrage passe-bande sélectif¹. La réponse $s(t)$ du filtre au signal créneau revient donc uniquement à la réponse de son fondamental, dont la fréquence est la fréquence de résonance du filtre. D'où :

$$s(t) = H(x = 1) \frac{2E}{\pi} \sin(2\pi \cdot f \cdot t + \varphi(x = 1))$$

avec $H(x = 1) = 1$

et $\varphi(x) = \arg(\underline{H})$, donc $\varphi(x = 1) = \arg(-1)$ D'où :

$$s(t) = -\frac{2E}{\pi} \sin(2\pi \cdot f \cdot t)$$



(b) On pourrait imaginer garder ce filtre sélectif ($Q = 20, R_1$ et R_2 restent fixés) et faire varier sa fréquence centrale f_0 en faisant varier C . À chaque résonance du signal de sortie, on passe sur une des harmoniques du signal d'entrée $e(t)$.

1. En effet, ceci est confirmé par le fait qu'en sortie le rapport des amplitudes des harmoniques à f et $3f$ est

$$3\sqrt{1 + Q^2 \left(3 - \frac{1}{3}\right)^2} \approx 3Q\left(3 - \frac{1}{3}\right) \approx 160 \gg 1.$$