

ANALYSE DE FOURIER ET FILTRAGE

CALCULATRICES AUTORISÉES

I. Transmission par modulation puis démodulation d'amplitude

Il est fréquent qu'un signal se présente sous une forme inadaptée à sa transmission ou à son traitement. La modulation est le procédé permettant de transporter les caractéristiques de ce signal dans des domaines de fréquences où la propagation et le traitement sont possibles. La démodulation est l'opération inverse.

I.1. Modulation d'amplitude

Le signal audio à transporter est appelé **signal modulant**. Les méthodes de modulation sont élaborées à partir d'une onde sinusoïdale pure, appelée porteuse ou **signal porteur**. Le résultat de la combinaison de ces deux signaux s'appelle **signal modulé**.

Le signal modulant est dans un premier temps considéré purement sinusoïdal, de fréquence f_m , noté $e(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$. Le signal porteur est de fréquence f_p très grande devant f_m :

$$p(t) = A_p \cos(2\pi f_p t) \quad \text{avec} \quad \boxed{f_p \gg f_m}.$$

Le signal modulé en amplitude est un signal de la forme :

$$s(t) = A_p (1 + m \cos(2\pi f_m t)) \cos(2\pi f_p t)$$

où m est l'*indice de modulation*, réel positif qui sera supposé toujours vérifier $m < 1$.

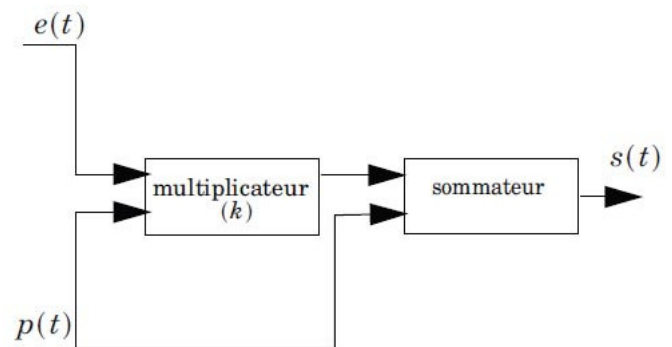


FIGURE 1 – Modulation en amplitude.

1. Ce signal modulé a été obtenu en réalisant les opérations représentées dans le schéma bloc Fig. 1 (chaque signal est un potentiel électrique, c'est-à-dire une tension relative à la masse qui est non-représentée). Le multiplicateur réalise le produit des deux signaux d'entrée, avec un facteur de proportionnalité k . Montrer que le schéma bloc permet effectivement d'obtenir le signal $s(t)$ et retrouver alors le lien entre m , A_m et k .

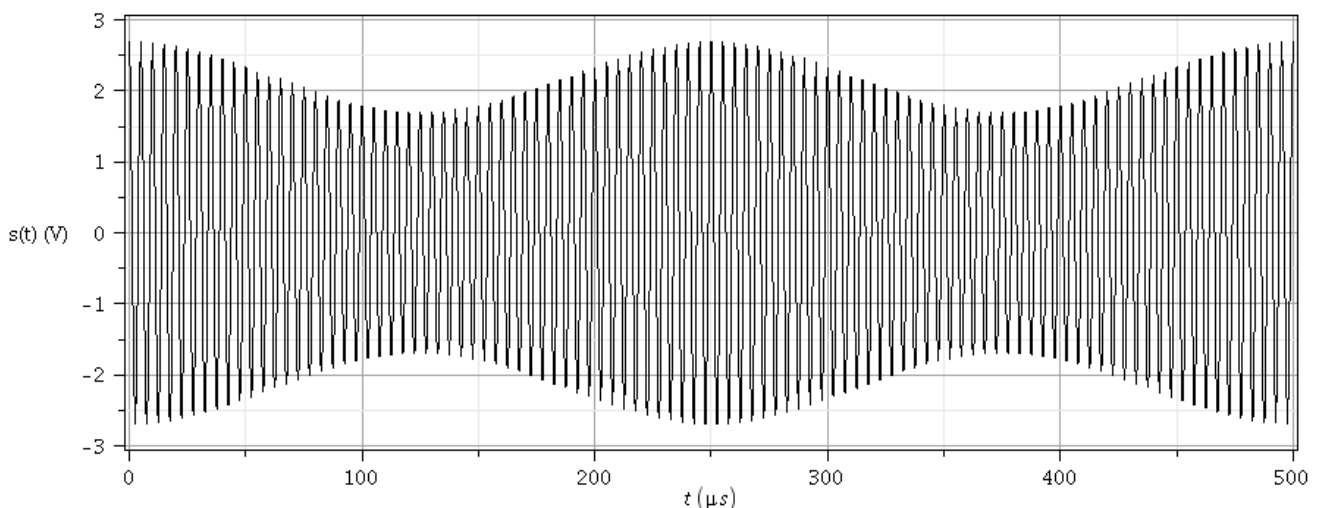
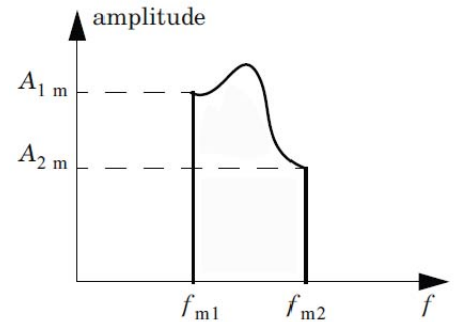


FIGURE 2 – Signal modulé en amplitude.

2. On a réalisé en laboratoire l'enregistrement d'un tel signal modulé en amplitude, représenté en Fig. 2. On appelle *enveloppes* les courbes de variation lente formées par les extrema locaux.
 - a) En exploitant graphiquement les variations des enveloppes (on pourra s'aider d'un schéma sur la copie), écrire un système linéaire à deux équations vérifié par A_p et m .
 - b) En déduire les valeurs de A_p et de m utilisées ici.
3. Après avoir linéarisé le signal $s(t)$, représenter son spectre de Fourier en amplitude, en indiquant les fréquences contenues dans $s(t)$.
4. En réalité, le signal modulant est un signal audio, somme de signaux sinusoïdaux qui occupent la plage de fréquence :

$$f_{m1} = 300 \text{ Hz} \leq f_m \leq f_{m2} = 4,50 \text{ kHz}$$

Le spectre en amplitude de ce signal audio est représenté schématiquement ci-contre.
 La porteuse utilisée ici est celle émise par la station Europe 1, soit $f_p = 185 \text{ kHz}$.



- a) En vous aidant de la question 3., représenter qualitativement l'allure du spectre en amplitude du signal modulé $s(t)$. On prendra soin d'indiquer les fréquences limites.
- b) On souhaite concevoir un filtre passe-bande permettant de transmettre intégralement et uniquement le signal $s(t)$ au niveau d'une antenne. Quelle doit être la bande passante minimale de ce filtre et sa largeur ?
- c) Montrer que la largeur de cette bande passante vérifie une relation simple avec le facteur de qualité du filtre Q .
- d) Proposer un montage série comprenant une résistance R , un condensateur de capacité C et une bobine d'inductance $L = 0,1 \text{ H}$, permettant de réaliser ce filtre. Montrer qu'il s'agit d'un filtre passe-bande par des comportements asymptotiques et établir ses paramètres canoniques.
- e) Déterminer la valeur des composants R et C à utiliser.

I.2. Démodulation synchrone

On considère à nouveau un signal modulé simple noté : $s(t) = A_p (1 + m \cos(2\pi f_m t)) \cos(2\pi f_p t)$.
 On admet que l'on dispose, au niveau du récepteur du signal modulé, d'un oscillateur local synchrone délivrant le signal $p(t) = A_p \cos(2\pi f_p t)$ identique au signal porteur utilisé à l'émission. La figure ci-dessous représente le principe de fonctionnement du circuit de démodulation situé après l'antenne réceptrice.

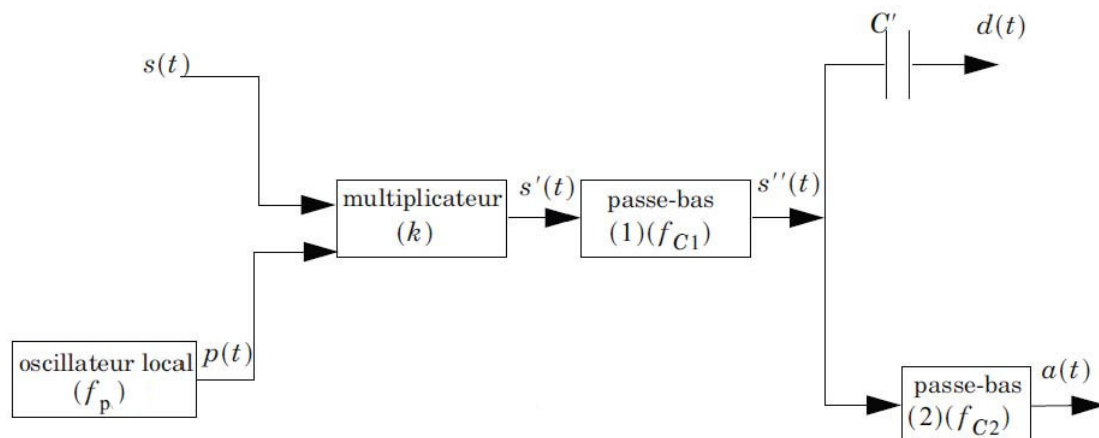


FIGURE 3 – Circuit de démodulation du récepteur.

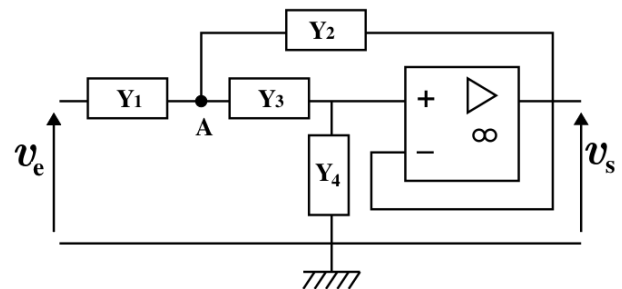
5. Donner l'expression du signal $s'(t)$ obtenu à la sortie du multiplicateur. Le linéariser et représenter le spectre en amplitude de ce signal.
6. Le filtre passe-bas (1) a une fréquence de coupure f_{c1} telle que $f_m < f_{c1} < f_p$ et le filtre passe-bas (2) a une fréquence de coupure $f_{c2} < f_m$. On considère pour cette question que les filtres sont parfaits, c'est-à-dire que chaque filtre admet un gain $|H| = 1$ pour des fréquences inférieures à sa fréquence de coupure et un gain nul pour toute fréquence supérieure à sa fréquence de coupure.
 - a) Exprimer alors les signaux $s''(t)$ et $a(t)$.
 - b) À quoi sert le condensateur de capacité C' représenté sur le schéma bloc? Donner alors l'expression du signal $d(t)$.

I.3. Conception d'un filtre passe-bas

On souhaite réaliser le filtre passe-bas (1) utilisé dans la chaîne de traitement précédente.

7.
 - a) Proposer un circuit RLC série qui puisse convenir pour réaliser le filtre (1), en justifiant.
 - b) Le cahier des charges imposant une atténuation de 80 dB pour les signaux de fréquences $2f_p$ par rapport aux signaux constants, quelle valeur faut-il choisir pour la fréquence propre f_0 ?
 - c) Quelle valeur choisir pour le facteur de qualité? En déduire des valeurs pertinentes pour L et R si on dispose d'une capacité de $C = 100$ nF.
 - d) Citer deux inconvénients majeurs de ce circuit lorsqu'il est utilisé dans la chaîne de traitement du problème précédent. Comment pourrait-on y remédier?

On souhaite concevoir le filtre sur la base du montage ci-contre, de type Sallen-Key, dans lequel les admittances Y_k sont constituées soit par des résistances R , soit par des condensateurs de capacité $C = 100$ nF. Le montage utilise un Amplificateur Linéaire Intégré (ALI) que l'on supposera idéal et fonctionnant en régime linéaire, c'est-à-dire :



- les potentiels des entrées (+) et (-) sont considérés égaux : $V_+ = V_-$;
 - les courants entrant dans les entrées (+) et (-) sont considérés nuls : $i_+ = i_- = 0$.
8.
 - a) On se place en régime sinusoïdal forcé de pulsation ω . En utilisant la loi des noeuds en terme de potentiel, établir une relation entre les potentiels complexes V_A (au noeud A), v_e et v_s .
 - b) Après avoir trouvé une seconde relation entre ces potentiels, en déduire le fait que la fonction de transfert H vérifie :

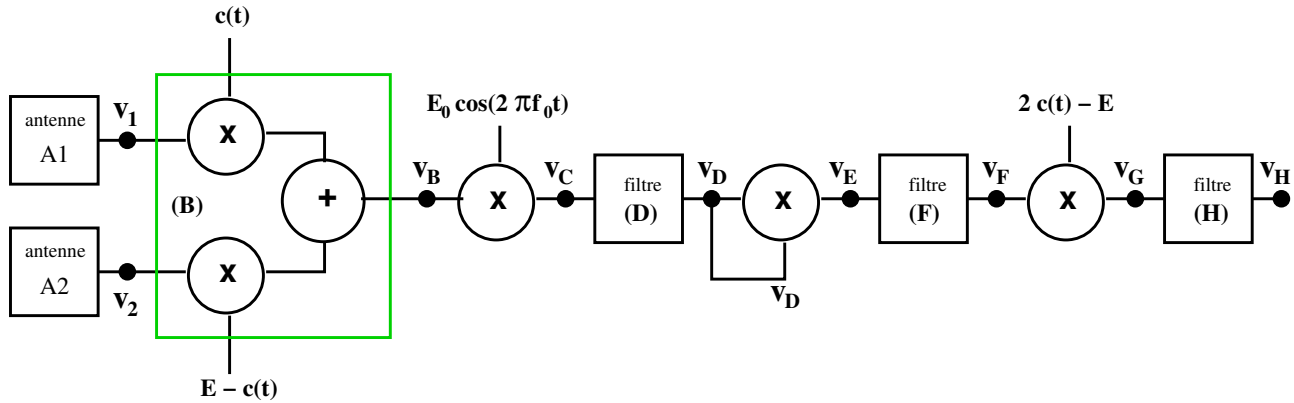
$$\frac{1}{H} = \frac{v_e}{v_s} = 1 + \frac{Y_4}{Y_1} + \frac{Y_4}{Y_3} + \frac{Y_2 Y_4}{Y_1 Y_3}$$
 - c) On choisit de placer des résistors en Y_1 et Y_3 , et des condensateurs en Y_2 et Y_4 . Montrer que dans l'hypothèse où l'on souhaite obtenir un filtre passe-bas d'ordre 2, et compte tenu des deux types de composants disponibles, il n'y a pas d'autre choix possible pour les admittances.
 - d) Vérifier alors que le comportement asymptotique à basse et haute fréquence du circuit obtenu correspond à un filtre passe-bas. On retrouvera aussi la valeur du gain statique.
 - e) Etablir l'expression de la fréquence de coupure f_c . Quelle valeur donner aux résistances R pour avoir $f_c = 10$ kHz?
 9. L'ingénieur chargé de la fabrication du filtre n'étant pas bien réveillé lors du montage, il intervertit les résistances et les condensateurs.

- a) Quel type de filtre obtient-on ? Exprimer sa fonction de transfert sous sa forme canonique, et définir ses paramètres caractéristiques. Calculer le gain G en fonction de la pulsation réduite x . Exprimer la nouvelle fréquence de coupure f_c en fonction de la fréquence propre f_0 .
- b) L'ingénieur teste alors le filtre avec un signal d'entrée sinusoïdal de d'amplitude $1,0\text{ V}$ et en fait varier la fréquence. Sur la voie 1 de l'oscilloscope, il observe le signal d'entrée avec une sensibilité verticale de 250 mV/div . Pour une fréquence $f = 1\text{ kHz}$, il y observe deux périodes entières du signal, qu'il synchronise avec un niveau de déclenchement à 0 V en pente descendante. Il passe ensuite en mode DUAL et observe simultanément le signal de sortie sur la voie 2. Il règle alors la sensibilité verticale de la voie 2 de sorte à obtenir une amplitude *graphiquement* 4 fois plus petite que sur la voie 1. Donner, en les justifiant, la sensibilité horizontale et la sensibilité verticale de la voie 2 utilisées. Représenter l'allure des signaux présents à l'écran sur *l'oscillogramme vierge N°1 fourni en ANNEXE 1* (voie 1 en bleu, voie 2 en rouge). On justifiera les résultats par des calculs approchés.
- c) Il passe ensuite à une fréquence de 100 kHz , et modifie la sensibilité horizontale pour observer de nouveau 2 périodes entières, et deux signaux cette fois graphiquement de même taille. Quelle est la nouvelle sensibilité verticale sur la voie 2 ? Représenter l'allure des signaux présents à l'écran sur l'oscillogramme vierge N°2 (*ANNEXE 1*).
- 10.** L'ingénieur comprend rapidement le problème et corrige son montage. On revient donc au filtre décrit en **8.**.
- a) Que vaut le facteur de qualité Q du filtre ainsi réalisé ? On souhaite plutôt obtenir $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Expliquer l'intérêt d'une telle valeur.
- b) En raisonnant sur l'expression de $\frac{1}{H}$ ci-dessus, montrer qu'il suffit de changer la valeur d'un seul composant parmi les quatre pour atteindre $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Etablir sa nouvelle valeur. Comment la fabriquer si l'on ne dispose que d'un seul type de composant (que ce soit pour R ou C) ?
- c) Donner alors l'expression de la nouvelle fréquence de coupure du filtre. Comment modifier les autres composants pour garder cette valeur de facteur de qualité mais retrouver une fréquence de coupure de 10 kHz ?
- 11.** Pour améliorer encore ce module de filtrage, le chef d'équipe propose alors de construire un second filtre identique à celui de la question **10.**, et de les monter en cascade.
- a) Donner, en la justifiant, l'expression de la fonction de transfert du filtre global ainsi obtenu.
- b) Faire l'étude asymptotique de la fonction de transfert et tracer l'allure des diagrammes de Bode.

II. Principe d'un spectromètre différentiel par détection hétérodyne

L'univers est baigné par un *rayonnement thermique* de type corps noir de température $T \approx 3\text{ K}$ émis un peu après le Big-Bang, et qui est perceptible aujourd'hui. Ce rayonnement électromagnétique est essentiellement centré sur la longueur d'onde $\lambda_m \approx 1\text{ mm}$ ce qui correspond à une fréquence $f \approx 3.10^{11}\text{ Hz}$.

On se propose de tester une éventuelle anisotropie de l'univers, c'est-à-dire qu'on souhaite vérifier si ce rayonnement dépend de la direction dans laquelle on l'observe. Le dispositif expérimental est schématisé par des blocs fonctionnels sur la figure ci-dessous.



- Deux antennes solitaires (A_1) et (A_2) identiques reçoivent le rayonnement cosmique dans deux directions faisant entre elles un angle de 60° . Ces antennes engendrent des tensions électriques $v_1(t)$ et $v_2(t)$ proportionnelles à l'amplitude des ondes reçues, donc à la racine carrée de l'éclairement¹ \mathcal{E} :

$$v_1(t) = k \sqrt{\mathcal{E}_1} \cos(2\pi f t - \phi_1) \quad \text{et} \quad v_2(t) = k \sqrt{\mathcal{E}_2} \cos(2\pi f t - \phi_2)$$

où \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 sont les éclairements reçus respectivement par l'antenne (A_1) et l'antenne (A_2), supposés a priori différents, et k est une constante positive.

- Le bloc (B) multiplie $v_1(t)$ par un signal $c(t)$, multiplie $v_2(t)$ par un signal $E - c(t)$, et forme la somme $v_B(t)$ des signaux obtenus. Le signal $c(t)$ est un créneau de période $T = 0,01\text{ s}$, de fréquence notée $f_c = \frac{1}{T}$, et tel que

$$c(0 < t < \frac{T}{2}) = E > 0 \quad \text{et} \quad c(\frac{T}{2} < t < T) = 0.$$

- Le bloc (C) engendre une tension $v_C(t)$ proportionnelle au produit de $v_B(t)$ par une tension $e_0(t) = E_0 \cos(2\pi f_0 t)$ émise par un oscillateur de fréquence f_0 telle que $f - f_0 \approx 1\text{ MHz}$.
- Le bloc (D) est un filtre passe-bande très sélectif, centré sur la fréquence $f - f_0$ et de bande passante $\Delta f = 25\text{ kHz}$.
- Le bloc (E) engendre une tension $v_E(t)$ proportionnelle au carré de $v_D(t)$.
- Le bloc (F) est un filtre passe-bas de fréquence de coupure f_F et délivre en sortie une tension $v_F(t)$.
- Le bloc (G) engendre une tension $v_G(t)$ proportionnelle au produit de $v_F(t)$ par le créneau $2c(t) - E$.
- Le bloc (H) est un filtre passe-bas de fréquence de coupure $f_H = 10\text{ Hz}$ et engendre la tension finale v_H qui est indépendante du temps.

On rappelle que le créneau $c(t)$ peut s'écrire à l'aide de son développement en série de Fourier :

$$c(t) = \frac{E}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n+1} \sin((2n+1)2\pi f_c t)$$

En réalité, le dispositif expérimental est naturellement d'une précision limitée, de telle sorte qu'on peut supposer que seuls les 100 premiers termes de la somme de Fourier sont utiles.

Dans ce problème, il est demandé de représenter certains signaux en fonction du temps. Tous les tracés seront réalisés sur les canevas vierges proposés dans l'ANNEXE 2, dans laquelle figurent déjà l'allure des signaux $v_1(t)$ et $v_2(t)$.

1. L'éclairement est le flux d'énergie reçue par unité de surface, qui s'exprime en W.m^{-2} .

1. a) Sur le graphe de $c(t)$ (ANNEXE 2), superposer l'allure du signal $E - c(t)$ (autre couleur que noir). En déduire l'allure qualitative de la tension $v_B(t)$. Résumer par une phrase le rôle du bloc (B).
- b) Quelles sont les fréquences présentes dans le produit de deux tensions sinusoïdales de fréquences f_1 et f_2 ? En déduire l'ensemble des fréquences présentes dans la tension $v_B(t)$.
- c) En déduire l'ensemble des fréquences présentes dans la tension $v_C(t)$.
- d) Même question pour $v_D(t)$. En supposant que dans sa bande passante, le gain et la phase du filtre (D) sont quasi constants, en déduire que :

$$\begin{aligned} v_D(nT < t < nT + \frac{T}{2}) &= \beta\sqrt{\mathcal{E}_1} \cos((f - f_0)t - \phi_1) \\ v_D(nT + \frac{T}{2} < t < (n+1)T) &= \beta\sqrt{\mathcal{E}_2} \cos((f - f_0)t - \phi_2) \end{aligned}$$

où β est une constante que l'on ne cherchera pas à déterminer.

- e) Dessiner l'allure qualitative de la tension $v_D(t)$ (ANNEXE 2), en prenant soin de marquer clairement la différence avec le schéma de $v_B(t)$. Expliquer le rôle des blocs (C) et (D).
2. a) Représenter l'allure de la tension $v_E(t)$ (ANNEXE 2). Quelle est la fréquence de son mode fondamental?
 - b) Comment faut-il choisir la fréquence de coupure f_F du filtre (F) pour qu'on ait :

$$v_F(nT < t < nT + \frac{T}{2}) = \gamma\mathcal{E}_1 \quad \text{et} \quad v_F(nT + \frac{T}{2} < t < (n+1)T) = \gamma\mathcal{E}_2$$

où γ est une constante qu'on ne cherchera pas à déterminer.

3. a) Représenter l'allure du signal $v_G(t)$ (ANNEXE 2).
 - b) Montrer qu'alors $v_H(t)$ est proportionnelle à l'écart $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2$.
4. Quel est l'intérêt du dispositif étudié ci-dessus par rapport à un dispositif plus simple, qui placerait derrière chaque antenne un module { bloc (E) + bloc (F)}, et ferait ensuite la soustraction des deux?

* * * FIN DE L'ÉPREUVE * * *

(pensez à rendre vos annexes en indiquant votre NOM et Prénom)

NOM Prénom :

ANNEXE 1

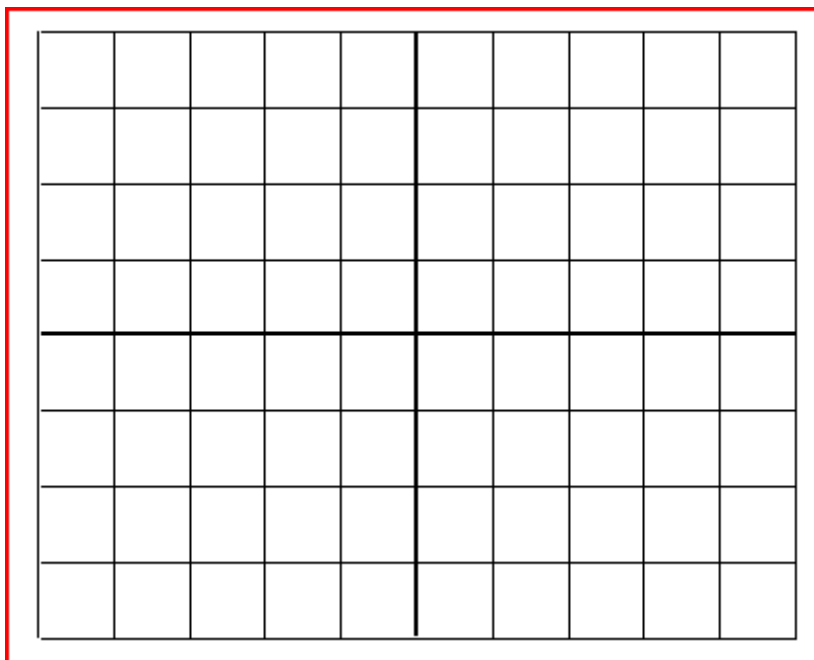


FIGURE 4 – Problème I - Question 9.b : Oscillogramme observé à $f = 1 \text{ kHz}$ (voie 1 : bleu, voie 2 : rouge).

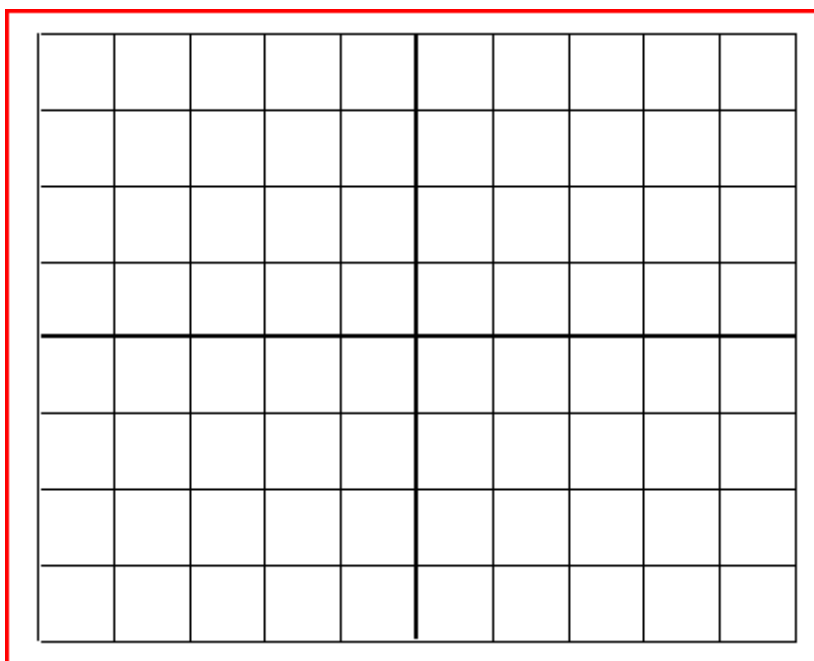


FIGURE 5 – Problème I - Question 9.c : Oscillogramme observé à $f = 100 \text{ kHz}$ (voie 1 : bleu, voie 2 : rouge).

ANNEXE 2

Les amplitudes relatives données ici aux signaux $v_1(t)$ et $v_2(t)$ sont arbitraires. Les rapports d'échelles de temps entre ces signaux et $c(t)$ ne sont pas représentatifs de la réalité pour des raisons de lisibilité évidentes. De même, les échelles verticales sont arbitraires. On veillera simplement à respecter qualitativement les différences relatives entre échelles de temps, ou entre amplitudes.

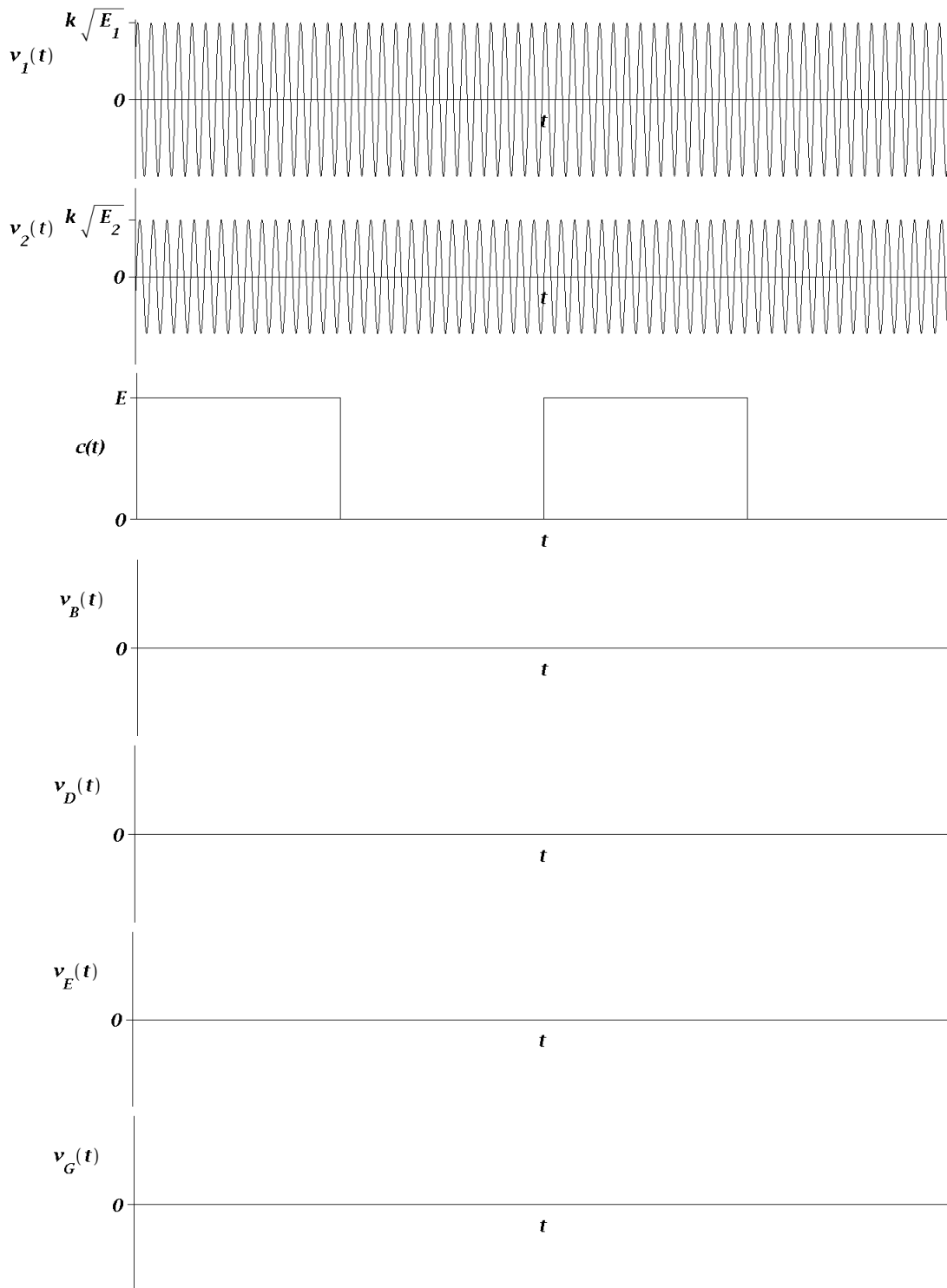


FIGURE 6 – Problème 2 : Signaux intervenant dans la chaîne de traitement du spectromètre différentiel.