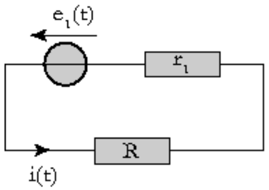
ELECTROCINÉTIQUE

I. Batterie Tampon

1.



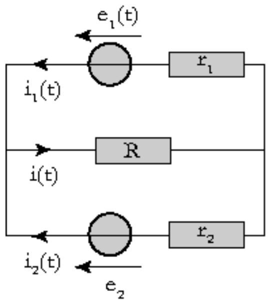
a) La loi des mailles s'écrit $e_1 = Ri + r_1 i$ d'où $\boxed{i = \dfrac{e_1}{r_1+R} = \dfrac{e_0 - kt}{r_1+R}}$.

b) $\boxed{k = \dfrac{e_0 - e_1(t=24h)}{t}} = \underline{0,050\,\mathrm{V.h^{-1}}}$.

c) Par proportionnalité, on obtient $\boxed{\dfrac{i(0)-i(t)}{i(0)} = \dfrac{e_0 - e_1(t)}{e_0} = \dfrac{kt}{e_0}} = \underline{0,20}$ au bout de 24 h.

2. **a)** La loi des nœuds et la loi des mailles s'écrivent

$$\begin{aligned} i &= i_1 + i_2 &(1)\\ Ri &= e_1 - r_1 i_1 &(2)\\ Ri &= e_2 - r_2 i_2 &(3)\end{aligned}$$

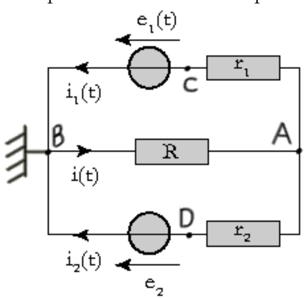


On élimine i_1 et i_2 au profit de i par la combinaison

$$\frac{1}{r_1}(2) + \frac{1}{r_2}(3) + (1) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{R}{r_1} + \frac{R}{r_2} + 1\right) i = \frac{e_1}{r_1} + \frac{e_2}{r_2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{i = \frac{e_1/r_1 + e_2/r_2}{R(1/r_1 + 1/r_2) + 1} = \frac{r_2 e_1 + r_1 e_2}{R(r_1+r_2) + r_1 r_2}}$$

b) Puisqu'on raisonne avec les potentiels, on peut placer arbitrairement une masse sur le circuit en B.

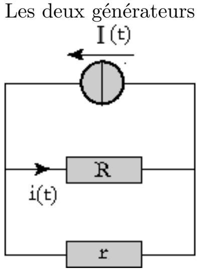


Donc on obtient $V_B = 0$, $V_C = -e_1$, $V_D = -e_2$, et $V_A = -Ri$ la loi des nœuds en termes de potentiel s'écrit au nœud A :

$$\frac{V_A - V_B}{R} + \frac{V_A - V_C}{r_1} + \frac{V_A - V_D}{r_2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -V_A = \frac{0/R + e_1/r_1 + e_2/r_2}{1/R + 1/r_1 + 1/r_2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{i = \frac{e_1/r_1 + e_2/r_2}{R(1/r_1 + 1/r_2) + 1}}$$

c) Les deux générateurs de Thévenin sont associés après avoir été convertis en générateurs de Norton.



Ceci donne le schéma ci-contre avec

$$r = \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)^{-1} \quad \text{et} \quad I(t) = \frac{e_1}{r_1} + \frac{e_2}{r_2}.$$

On reconnaît alors un pont diviseur de courant, d'où

$$i = \frac{r}{r+R} I(t) = \frac{I(t)}{1 + \frac{R}{r}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{i = \frac{e_1/r_1 + e_2/r_2}{R(1/r_1 + 1/r_2) + 1}}.$$

d) Notons plus simplement

$$i(t) = \alpha e_1(t) + \beta \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{1/r_1}{R(1/r_1 + 1/r_2) + 1} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{e_2/r_2}{R(1/r_1 + 1/r_2) + 1}.$$

Ceci permet d'écrire

$$\frac{i(0) - i(t)}{i(0)} = \frac{\alpha(e_0 - e_1(t))}{\alpha e_0 + \beta} = \frac{e_0 - e_1(t)}{e_0 + \frac{\beta}{\alpha}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{i(0)-i(t)}{i(0)} = \frac{kt}{e_0 + e_2\frac{r_1}{r_2}}} = \underline{0,12}.$$

au bout de 24 h. La baisse est de **12% par jour** contre 20% avec le circuit sans batterie tampon.

e) D'après l'Eq. (3), on obtient

$$i_2 = \frac{1}{r_2}(e_2 - Ri) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{i_2 = \frac{e_2(1/r_1 + 1/R) - e_1/r_1}{r_2(1/r_1 + 1/R) + 1} = \frac{e_2(R + r_1) - Re_1}{R(r_1+r_2) + r_1 r_2}}.$$

f) La source de f.e.m e_2 fonctionne en générateur si la puissance qu'elle cède est positive :

$$\mathcal{P} = e_2 i_2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad i_2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad e_2(R+r_1) - Re_1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad e_1 < \left(1 + \frac{r_1}{R}\right) e_2.$$

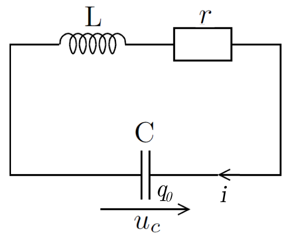
Or $e_1(t) = e_0 - kt$ donc **elle fonctionne en générateur si**

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{t > \frac{1}{k}\left(e_0 - \left(1 + \frac{r_1}{R}\right) e_2\right) = t_g} = \underline{8,0\,\mathrm{h}}.$$

Avant cette date, elle fonctionne en récepteur. D'où l'appellation « Batterie-Tampon ».

II. Circuit RLC série en régime libre

1.



On oriente le courant en convention croisée pour le condensateur.
Loi des mailles : $u_c + ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$. En injectant $i = C\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$ on obtient $\boxed{\ddot{u}_c + \frac{\omega_0}{Q}\,\dot{u}_c + \omega_0^2\,u_c = 0}$ avec $\boxed{\omega_0 = 1/\sqrt{LC} \text{ et } Q = \frac{1}{r}\sqrt{L/C}}$.
On pose aussi $\frac{2}{\tau} = \frac{\omega_0}{Q}$ d'où $\boxed{\tau = \frac{2Q}{\omega_0} = \frac{2L}{R}}$.

2. Pour $r = 0$ le régime est harmonique. La solution générale s'écrit $u_c(t) = A\,\cos(\omega_0 t) + B\,\sin(\omega_0 t)$. La charge du condensateur et le courant sont continus donc $q_0/C = A$ et $i(0) = 0 = CB\omega_0$. D'où $\boxed{u_c(t) = q_0/C\,\cos(\omega_0 t)}$. Ce signal oscille à la période $\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{LC}}$.

3. **a)** Le régime oscille autour du régime permanent $u_c = 0$, donc c'est un régime <u>pseudopériodique</u>. Le discriminent de l'équation caractéristique est donc négatif :

$$\frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad Q > \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{r < 2\sqrt{L/C}}.$$

b) La forme générale de la solution est

$$u_c(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}\left(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right) = D\,e^{-\frac{t}{\tau}}\,\cos(\omega t + \varphi) \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}}}$$

(par résolution de l'équation caractéristique $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$). On détermine les constantes par les conditions initiales, par continuité de la tension aux bornes du condensateur (charge q_0) et du courant traversant la bobine (nul lorsque le circuit est ouvert) :

$$u_c(0) = \frac{q_0}{C} = A \quad \text{et} \quad i(0)/C = 0 = -\frac{A}{\tau} + B\omega \quad \Rightarrow \quad B = \frac{q_0}{C\omega\tau}$$

Finalement $\boxed{u_c(t) = \frac{q_0}{C}e^{-\frac{t}{\tau}}\left(\cos(\omega t) + \frac{1}{\tau\omega}\sin(\omega t)\right) = D\,e^{-\frac{t}{\tau}}\,\cos(\omega t + \varphi)}$ avec $\boxed{D = \frac{q_0}{C}\sqrt{\left(1 + \frac{1}{\tau^2\omega^2}\right)}}$,

et $\boxed{\varphi = -\arctan\left(\frac{1}{\tau\omega}\right)}$.

Remarque : on peut aussi appliquer les conditions initiales en passant directement par la forme $u_c(t) = D\,e^{-\frac{t}{\tau}}\,\cos(\omega t + \varphi)$ *:*
$u_c(0) = q_0/C = D\,\cos\varphi$ *et* $i(0)/C = D(-\frac{1}{\tau}\,\cos\varphi - \omega\,\sin\varphi) = 0$. *On en déduit* $\tan\varphi = -\frac{1}{\tau\omega}$ *avec* $\varphi \in]-\frac{\pi}{2}, 0]$, *donc* $\boxed{\varphi = -\arctan\left(\frac{1}{\tau\omega}\right)}$. *Puis* $\boxed{D = \frac{q_0/C}{\cos\varphi} = \frac{q_0}{C}\sqrt{1 + \tan^2\varphi} = \frac{q_0}{C}\sqrt{\left(1 + \frac{1}{\tau^2\omega^2}\right)}}$.

c) L'équation étant sans second membre (régime libre), la solution se limite au régime transitoire pseudo-périodique. Alors par définition $\boxed{\delta = \ln\frac{u_c(t_\mathrm{m})}{u_c(t_\mathrm{m} + T)}}$ en notant t_m un instant où u_c est maximale ou minimale.
Comme $T = \frac{2\pi}{\omega}$ est la pseudo-période on obtient $u_c(t_\mathrm{m} + T) = e^{-\frac{T}{\tau}}.u_c(t_\mathrm{m})$. D'où

$$\boxed{\delta = \frac{T}{\tau} = \frac{\pi\omega_0}{\omega Q} = \frac{\pi}{Q}\left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)^{-\frac{1}{2}}}.$$

Compte-tenu du fait que l'on observe environ 5 oscillations sur le chronogramme, on s'attend à avoir $Q \approx 5$ donc $Q^2 \gg 1$ et donc $\omega \approx \omega_0$ (ou $T \approx T_0$) et simplement $\boxed{\delta \approx \frac{\pi}{Q}}$.

4. **a)** On mesure la pseudo-période par l'écartement des zéros du régime transitoire, espacés de $T/2$, c'est-à-dire les points où u_c s'annule ici. On compte 10 zéros en $9,0\,\mu\mathrm{s}$, donc <u>$T = 2,0\,\mu\mathrm{s}$</u>.

b) *Il n'est pas très prudent d'utiliser le point en $t = 0$ car on n'est pas certain que ce soit vraiment un maximum.* En utilisant le premier maximum et le dernier (5ème), on obtient $\delta = \ln(1,7/0,15)/4 \approx 0,61$. En utilisant le premier et le second minimum (pics les plus hauts pour une meilleure précision), on obtient <u>$\delta = \ln(1,2/0,65) \approx 0,61$</u> ($\delta \approx 0,58$ avec les 2 premiers maxima, a priori moins précis). On en déduit $\boxed{Q \approx \frac{\pi}{\delta}} \approx$ <u>$5,2$</u>, et $\boxed{\tau = \frac{T}{\delta}} =$ <u>$3,3\,\mu\mathrm{s}$</u>.
Remarque : le calcul exact aurait donné $Q = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\pi^2}{\delta^2}} = 5,2$. *Pas de différence à ce niveau de précision.*

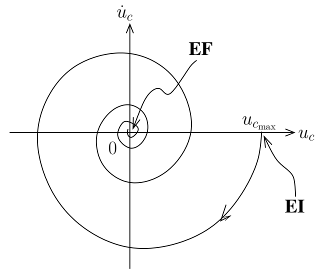
c) $\boxed{\frac{T - T_0}{T_0} = \left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1} \approx$ <u>$0,5\,\%$</u>.

d) On en déduit que $\omega_0 \approx \omega = 2\pi/T$ à $0,5\,\%$ près. Or $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ donc $\boxed{L \approx \frac{T^2}{4\pi^2 C}} \approx$ <u>$1,0\,\mathrm{mH}$</u>.

e) Sur le graphe, on lit la valeur maximale à l'instant initial : <u>$u_{c_\mathrm{max}} = 1,6\,\mathrm{V}$</u>, d'où $\boxed{q_0 = Cu_{c_\mathrm{max}}} =$ <u>$1,6 \times 10^{-10}\,\mathrm{C}$</u>.

5. On obtient le portrait ci-contre :

Celui-ci tourne nécessairement dans le sens horaire, depuis l'état initial (EI) ($u_c = \frac{q_0}{C}, \dot{u}_c(0) = \frac{i(0)}{C} = 0$) vers l'état final (EF) ($u_c = 0, \dot{u}_c = 0$) (condensateur déchargé et coupant le circuit en régime stationnaire).



6. $i = C\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$ d'où $\boxed{i(t) = -q_0\omega\left(1 + \frac{1}{\tau^2\omega^2}\right)e^{-\frac{t}{\tau}}\,\sin(\omega t)}$ (le terme en $\cos(\omega t)$ disparaît).

Comme $Q \gg 1$, on obtient à la limite $\omega \approx \omega_0$, et $\omega_0\tau = 2Q \gg 1$ donc $\boxed{i(t) \approx -\omega_0 q_0\,e^{-\frac{t}{\tau}}\,\sin(\omega_0 t)}$.

7. L'énergie est stockée sous forme électrique dans le condensateur et magnétique dans le bobine : $\mathcal{E} = \mathcal{E}_e + \mathcal{E}_m = \frac{1}{2}Cu_c^2 + \frac{1}{2}Li^2$. Comme $Q \gg 1$, on a aussi $u_c \approx \frac{q_0}{C}\,e^{-\frac{t}{\tau}}\,\cos(\omega_0 t)$, ce qui mène à

$$\mathcal{E} \approx \frac{1}{2}\frac{q_0^2}{C}\,e^{-\frac{2t}{\tau}}\,\cos^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2}\frac{q_0^2}{C}\,e^{-\frac{2t}{\tau}}\,\sin^2(\omega_0 t) \quad \text{donc} \quad \boxed{\mathcal{E} \approx \frac{1}{2}\frac{q_0^2}{C}\,e^{-\frac{2t}{\tau}}}$$

8. D'après l'expression ci-dessus, qui est approximative, $\mathcal{E}$ <u>décroît</u> au cours du temps. Ce résultat est correct car le bilan de puissance du circuit s'écrit : $i\,u_c + iL\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -ri^2$. Avec $i = C\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$ on obtient

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t} = -ri^2 < 0}.$$

Ainsi l'énergie stockée est dissipée à tout instant par effet Joule dans la résistance.

9. $\boxed{\alpha = 1 - \frac{E(t+T)}{E(t)} \approx 1 - e^{-\frac{2T}{\tau}}} =$ <u>$0,70$</u>. **70% de l'énergie stockée à un instant sera perdue au bout d'une pseudo-période**.

III. Analogie et étude de cavités résonantes *(d'après CAPES Externe 2011)*

III.1. Etude du modèle idéal

1. On additionne les admittances puisque les deux dipôles sont en parallèle : $\boxed{\underline{Z} = \left(jC\omega + \frac{1}{jL\omega})\right)^{-1}}$.

2. On a d'abord $i_1 = u/R$ avec $u = U_m \cos(\omega t)$, donc $\boxed{i_1(t) = \frac{U_m}{R}\cos(\omega t)}$.

Pour i_2, on travaille avec les grandeurs complexes associées. On a $\underline{i_2} = \underline{u}/\underline{Z} = j\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)\underline{u}$. L'amplitude s'obtient par le module, $|\underline{i_2}| = |C\omega - \frac{1}{L\omega}|\,U_m$. On observe qu'elle s'annule pour $\omega = 1/\sqrt{LC}$, ce qui répond à la question suivante en posant $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.
L'argument est $\arg[\underline{i_2}] = \arg[j] + \arg[C\omega - \frac{1}{L\omega}] + \arg[\underline{u}] = \frac{\pi}{2} + \arg[C\omega - \frac{1}{L\omega}] + \omega t$. Donc $\arg[C\omega - \frac{1}{L\omega}] = 0$ si $C\omega - \frac{1}{L\omega} > 0 \Leftrightarrow \omega > \omega_0$ et $\arg[C\omega - \frac{1}{L\omega}] = -\pi \quad [2\pi]$ si $C\omega - \frac{1}{L\omega} < 0 \Leftrightarrow \omega < \omega_0$. On en déduit finalement que $i_2 = U_m\,|C\omega - \frac{1}{L\omega}|\cos(\omega t \pm \frac{\pi}{2})$ avec un + si $\omega > \omega_0$ et un − sinon. Cela peut se récrire $i_2 = \mp U_m\,|C\omega - \frac{1}{L\omega}|\sin(\omega t)$, c'est-à-dire $\boxed{i_2(t) = U_m\left(\frac{1}{L\omega} - C\omega\right)\sin(\omega t)}$ quelque soit ω.

3. D'après la question précédente, $i_2 = 0$ si $\omega = \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$.

III.2. Etude du modèle "réel"

4. Cette fois $\boxed{\underline{Z} = \left(jC\omega + \frac{1}{r + jL\omega})\right)^{-1}}$.

5. En introduisant ω_0 on obtient $\underline{Z} = \left(j\sqrt{\frac{C}{L}}\,x + \frac{1}{r+j\sqrt{\frac{L}{C}}\,x})\right)^{-1}$. On forme un facteur sans dimension que l'on manipule ensuite : $\underline{Z} = r\left(jr\sqrt{\frac{C}{L}}\,x + \frac{1}{1+j\frac{1}{r}\sqrt{\frac{L}{C}}\,x})\right)^{-1} = r\,\frac{1+j\frac{1}{r}\sqrt{\frac{L}{C}}\,x}{1+jr\sqrt{\frac{C}{L}}\,x\left(1+j\frac{1}{r}\sqrt{\frac{L}{C}}\,x\right)} = r\,\frac{1+j\frac{1}{r}\sqrt{\frac{L}{C}}\,x}{1-x^2+jr\sqrt{\frac{C}{L}}\,x}$. D'où

$\boxed{\underline{Z} = r\,\frac{1 + jQx}{1 - x^2 + j\,\frac{x}{Q}}}$ en posant $\boxed{Q = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{L\omega_0}{r}}$, et donc $\boxed{|\underline{Z}| = r^2\,\frac{1 + Q^2x^2}{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$.

6. Le dipôle $\{r, L\}$ est soumis à la tension u. La loi d'Ohm complexe donne $\underline{i_L} = \underline{u}/(r + jL\omega)$.

En prenant le module on obtient $\boxed{I_0 = \frac{U_m}{\sqrt{r^2 + L^2\omega^2}}}$.

D'autre part, $\arg[\underline{i_L}] = \arg[\underline{u}] - \arg[r + jL\omega] \Leftrightarrow \omega t + \alpha = \omega t + \arg[r - jL\omega] \Leftrightarrow \boxed{\alpha = \arg[r - jL\omega] = -\arctan\left(\frac{L\omega}{r}\right)}$.

7. Lorsque $\frac{L\omega}{r} \to \infty$, on a $\boxed{\alpha \longrightarrow -\frac{\pi}{2}}$. Sachant que la tension u s'applique aussi au condensateur, dans ces conditions i_L est en retard de phase sur u et en quadrature.

8. De l'énergie est stockée sous forme électrostatique dans le condensateur ($\mathcal{E}_e$), et sous forme magnétique dans la bobine ($\mathcal{E}_m$). Au total on a

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_e + \mathcal{E}_m = \frac{1}{2}Cu^2 + \frac{1}{2}Li_L^2 = \frac{1}{2}\left(CU_m\cos^2(\omega_0 t) + LI_0^2\cos^2(\omega_0 t - \frac{\pi}{2})\right) = \frac{1}{2}\left(CU_m^2\cos^2(\omega_0 t) + LI_0^2\sin^2(\omega_0 t)\right).$$

Or on a $I_0 \approx U_m/(L\omega)$ car $L\omega/r \gg 1$. Donc pour $\omega = \omega_0$ cela donne $I_0 \approx \sqrt{\frac{C}{L}}\,U_m$, et donc $CU_m^2 = LI_0^2$.
Ceci conduit à $\mathcal{E} = \frac{1}{2}LI_0^2\left(\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t)\right)$ donc $\boxed{\mathcal{E} = \frac{1}{2}LI_0^2}$. On remarque qu'à cette pulsation, l'énergie totale stockée dans le circuit ne dépend pas du temps, bien que les énergies stockées dans le

condensateur d'une part et la bobine d'autre part dépendent naturellement du temps. Rappelons que ce résultat n'est vrai que sous l'hypothèse $r \ll L\omega_0$.

9. La puissance moyenne reçue et donc dissipée dans la résistance r s'écrit

$$\mathcal{P} = \langle ri_L^2(t)\rangle = rI_0^2 \langle\cos^2(\omega t + \alpha)\rangle \quad \text{donc} \quad \boxed{\mathcal{P} = \frac{1}{2}rI_0^2}.$$

D'après les questions précédentes on a $\frac{I_0^2}{2} = \frac{\mathcal{E}}{L}$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{L}{C}}$, ce qui donne

$$\mathcal{P} = \frac{r}{L}\,\mathcal{E} = \frac{1}{\sqrt{LC}}\,r\sqrt{\frac{C}{L}}\,\mathcal{E} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\mathcal{P} = \frac{\omega_0\mathcal{E}}{Q}}.$$

10. Traduisons les données de l'énoncé : $\omega_0 U = P_{\text{amb}}\,Q_{\text{amb}} = P_{4\,\text{K}}\,Q_{4\,\text{K}}$. D'où $\boxed{P_{\text{amb}} = P_{4\,\text{K}}\,\frac{Q_{4\,\text{K}}}{Q_{\text{amb}}}} = \underline{5 \times 10^6\ \text{W}}$.

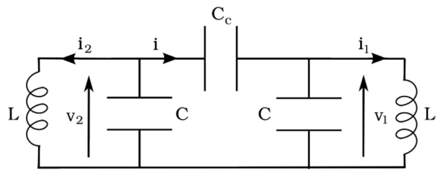
La puissance trouvée ci-dessus est énorme, et elle est dissipée par la cavité par effet Joule donc perdue, car elle ne sert pas effectivement à accélérer les particules. Si l'on travaille avec des cavités supraconductrices, la résistance devient très faible ($r \longrightarrow 0$) donc le facteur de qualité devient très grand ($Q \longrightarrow \infty$). Ainsi, on fait décroître la proportion de la puissance consommée perdue par effet Joule. L'état de supraconductivité s'obtient à des températures très basses, d'où le 4 K dans l'énoncé.

III.3. Modèle électronique pour deux cavités idéales couplées

11. On a en convention croisée une tension $v_2 - v_1$ appliquée à la capacité C_c, d'où $\boxed{i = C_c\left(\frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t}\right)}$.

12. Dorénavant on note par un point les dérivées temporelles des tensions.

On définit les courants i_1 et i_2 dans les bobines, orientés en convention croisée par rapport aux tensions respectives v_1 et v_2. On écrit la loi des mailles et la loi des nœuds pour chaque cavité.



Cela donne à gauche :

$$v_2 = L\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = -L\,\frac{\mathrm{d}(i + C\dot{v_2})}{\mathrm{d}t} = -L\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(C_c(\dot{v_2} - \dot{v_1}) + C\dot{v_2}\right).$$

A droite on obtient

$$v_1 = L\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = L\,\frac{\mathrm{d}(i - C\dot{v_1})}{\mathrm{d}t} = L\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(C_c(\dot{v_2} - \dot{v_1}) - C\dot{v_1}\right).$$

En introduisant les constantes proposées dans l'énoncé, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases}(1+D)\,\ddot{v_2} - D\,\ddot{v_1} + \omega_0^2\,v_2 = 0\\(1+D)\,\ddot{v_1} - D\,\ddot{v_2} + \omega_0^2\,v_1 = 0\end{cases}$$

13. Le système différentiel précédent étant linéaire à coefficients constants, le même système est vérifié par les grandeurs complexes associées. En remplaçant dérivation par multiplication par $j\omega$, on trouve donc le système suivant après factorisation par ω_0 et simplification des facteurs $e^{j\omega t}$:

$$\begin{cases}Dx^2\,V_{1m} + \left(1 - (1+D)x^2\right)\underline{V_2} = 0 & \text{(C1)}\\\left(1 - (1+D)x^2\right)V_{1m} + Dx^2\,\underline{V_2} = 0 & \text{(C2)}\end{cases}$$

En éliminant par exemple V_{1m}, on obtient $\left((1-(1+D)x^2)^2 - D^2x^4\right)\underline{V_2} = 0$. Pour qu'il y ait un signal sur les cavités, il est donc nécessaire $\underline{V_2} \neq 0$, et donc

$$\boxed{\left(1-(1+D)x^2\right)^2 - D^2x^4 = 0},$$

sinon on aurait $\underline{V_2} = 0$ et donc $V_{1m} = 0$ d'après l'Eq. (C1). On trouverait biensûr la même condition en cherchant V_{1m}. Il s'agit en fait du *déterminant* du système linéaire, qui doit s'annuler pour admettre des solutions non nulles.

14. On factorise ce polynôme ainsi : $(1-x^2)\,.\,(1-(1+2D)x^2) = 0$. Donc comme $x > 0$, on trouve les deux solutions

$$\boxed{\omega_1 = \omega_0 \quad \text{et} \quad \omega_2 = \omega_0\,\tfrac{1}{\sqrt{1+2D}}}$$

Supposons que $v_1(t) = V_{1m}\,\cos(\omega t)$ est connu.

- Pour $\omega = \omega_1$, donc $x = 1$, l'Eq. (C1) conduit à $\underline{V_2} = V_{1m}$. Donc

$$\boxed{v_2(t) = v_1(t) = V_{1m}\,\cos(\omega_0 t) \quad \text{pour} \quad \omega = \omega_1}.$$

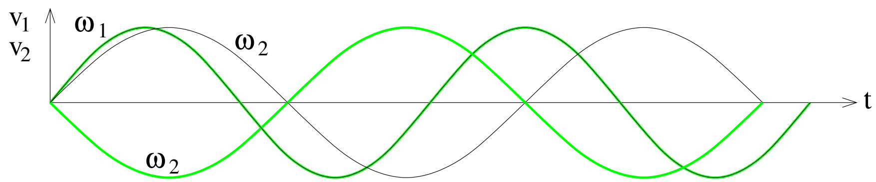
  Les signaux des deux cavités sont donc en phase, et mieux ils sont identiques. Ce mode est dit "**symétrique**".

- Pour $\omega = \omega_2$, donc $1-(1+2D)x^2 = 0$ ou $1-(1+D)x^2 = Dx^2$, l'Eq. (C1) conduit à $\underline{V_2} = -V_{1m}$. Donc

$$\boxed{v_2(t) = -v_1(t) = -V_{1m}\,\cos(\tfrac{1}{\sqrt{1+2D}}\omega_0 t) \quad \text{pour} \quad \omega = \omega_2}.$$

  Les signaux des deux cavités sont en opposition de phase, avec une pulsation inférieure à ω_0. Ce mode est dit "**anti-symétrique**".

On représente ci-dessous v_1 (trait fin noir) et v_2 (trait épais vert) pour les deux modes propres.



15. Pour $k = 1$ ou 2,

$$\underline{i_k}(t) = \frac{\underline{v_k}}{jL\omega} = \frac{\underline{v_k}}{L\omega}.e^{-j\frac{\pi}{2}} = \frac{\underline{V_k}}{L\omega}.e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})} \quad \text{et} \quad i_k(t) = \Re\left(\underline{i_k}(t)\right)\,.$$

Cela conduit aux expressions suivantes.

- Mode symétrique ($\omega = \omega_1 = \omega_0$) : alors $\underline{V}_2 = \underline{V}_1 = V_{1m}$ donc

$$\boxed{i_1(t) = \frac{V_{1m}}{L\omega}\,\cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) = \frac{V_{1m}}{L\omega}\,\sin(\omega t)} \quad \text{et} \quad \boxed{i_2(t) = i_1(t)};$$

- Mode anti-symétrique ($\omega = \omega_2$) : on a alors $\underline{V}_2 = -\underline{V}_1 = -V_{1m}$ donc de même

$$\boxed{i_1(t) = \frac{V_{1m}}{L\omega}\,\sin(\omega t)} \quad \text{et} \quad \boxed{i_2(t) = -i_1(t)}.$$

16. Pour la cellule de gauche ($k = 2$) comme de droite ($k = 1$), on a donc d'après la question précédente :

$$\mathcal{E}_k = \frac{1}{2}\left(Li_k^2 + Cv_k^2\right) = \frac{1}{2}V_{1m}^2\,\left(\frac{L}{L^2\omega^2}\,\sin^2(\omega t) + C\cos^2(\omega t)\right) = \frac{1}{2}CV_{1m}^2\,\left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\,\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)\right)\,.$$

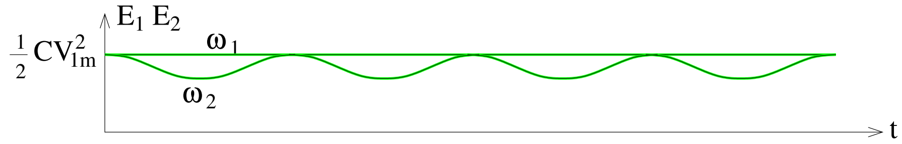
PCSI 1 - Stanislas *DS de PHYSIQUE N°4 - 12/12/20 - CORRIGÉ* A. MARTIN

- Mode symétrique : si $\omega = \omega_1 = \omega_0$, on a donc $\boxed{\mathcal{E}_1(t) = \mathcal{E}_2(t) = \frac{1}{2}CV_{1m}^2}$. On retrouve une **énergie constante** comme précédemment en question **9.**.
- Mode anti-symétrique : si $\omega = \omega_2$, on a

$$\boxed{\mathcal{E}_1(t) = \mathcal{E}_2(t) = \frac{1}{2}CV_{1m}^2\,\left(\tfrac{1}{1+2D}\,\sin^2(\omega_2 t) + \cos^2(\omega_2 t)\right) = \frac{1}{2(1+2D)}CV_{1m}^2\,\left(1 + D + D\cos(2\omega_2 t)\right)}.$$

  L'énergie oscille donc entre $\frac{1}{2(1+2D)}CV_{1m}^2$ et $\frac{1}{2}CV_{1m}^2$ avec une période $\frac{\pi}{\omega_2}$.

On représente ci-dessous les énergies pour les deux modes propres (même code).



IV. Bilan du DS

➔ Statistiques : $n \in [5,7;16,5]$, moy$=11,5$, med$=12,0$, $\sigma=2,6$ (écart-type).
L'écart-type est nettement resserré par rapport aux devoirs de 2h, ce qui prouvent que les élèves qui réussissent le moins progressent, et que la classe est de niveau relativement homogène.

➔ Comme d'habitude à cette période de l'année, il y a beaucoup de difficultés sur les calculs, avec des erreurs d'étourderies qui rendent les résultats littéraux absurdes et les AN fausses.
Même si c'est une compétence qui prend du temps, il faut travailler dès maintenant dans l'optique de surveiller l'**homogénéité**. Ce doit être un souci constant. Vous verrez que les habitudes viennent vite, et que cela vous sera extrêmement utile.

➔ Le cours est plutôt bien connu, ce qui me rend confiant pour la suite. Toutefois je note

- que presque toute la classe a été incapable d'appliquer la LNTP correctement au I, ce qui prouve que ce point n'est pas assimilé ;
- qu'il y a encore trop d'erreurs sur le cours sur les transitoires du second ordre (notamment la définition du décrément et les propriétés qui en résultent).

➔ Encore trop d'élèves négligent les schémas. Même si celui-ci figure déjà dans l'énoncé, il y a la plupart du temps des notations à y ajouter. J'accorde toujours des points pour les schémas, qu'ils soient demandés explicitement ou non.

➔ Plus généralement je constate avec dépit que des conseils que j'ai bien répétés en classe ne sont toujours pas appliqués par certains.es. :-(

➔ Partie I

- Cherchez la simplicité dans les calculs, et simplifiez vos résultats (nécessaire pour les AN ou les exploitations qui suivent) ;
- Numérotez les équations pour mieux expliciter vos raisonnements, et vous resservir des relations déjà établies.

➔ Partie II

- Il y avait un mini-flou concernant les conditions initiales puisqu'il n'était pas écrit en toutes lettres que le circuit était ouvert dans l'état initial (donc $i(0^+)=i(0^-)=0$). Toutefois vous devez comprendre que dans ces conditions il n'y a aucun autre moyen de connaître la valeur de $\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}(0^+)$. Cela fait partie des données nécessaires, soit fournies directement soit à trouver indirectement à partir d'une autre donnée. Ici on voyait que cette dérivée était quasi-horizontale sur le graphe, mais surtout plus fondamentalement : **en l'absence d'informations explicites mentionnant le contraire, il est absolument naturel de considérer le circuit ouvert au départ puisqu'il faut bien réaliser le montage, et faire en sorte que le condensateur soit chargé au départ (donc déconnecté du reste du circuit).**
- Le signal d'un régime *pseudo-périodique* n'est **pas périodique** comme son nom l'indique. J'ai fait la maladresse de dire en cours que les maxima/minima sont T-périodiques, ce qui n'est correct. Il faut dire qu'ils sont espacés d'une durée T.
- Le temps caractéristique de décroissance τ du régime pseudo-périodique **ne s'obtient pas comme dans le cas d'un 1er ordre**. La raison est simple : l'enveloppe du signal n'apparaît pas directement sur le signal, et donc on n'a pas accès ni aux points particuliers 37-63% (ou 95% etc) ni à la tangente à l'origine. τ **s'obtient donc par l'intermédiaire de la mesure du décrément logarithmique.**
- **Mesurer le décrément (directement à partir de sa définition) équivaut à mesurer le facteur de qualité** car il y a un lien direct bi-univoque entre les deux (à redémontrer chaque fois a priori) :

$$\delta=\frac{\pi}{Q}\left(1-\frac{1}{4Q^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad\Leftrightarrow\quad Q=\sqrt{\frac{\pi^2}{\delta^2}+4}\,.$$

PCSI 1 - Stanislas *DS de PHYSIQUE N°4 - 12/12/20 - CORRIGÉ* A. MARTIN

L'utilisation des formes simplifiées doit être justifiée par une valeur probable de Q suffisamment grande (quelques unités, valable si on observe plus de 4-5 oscillations) :

$$Q\gg 1 \quad\Rightarrow\quad \delta\approx\frac{\pi}{Q} \quad\Leftrightarrow\quad Q\approx\frac{\pi}{\delta}$$

La mesure du second paramètre canonique ω_0 se fait nécessairement dans un second temps, à condition de mesurer aussi la pseudo-période T :

$$\omega_0=\frac{2\pi}{T}\left(1-\frac{1}{4Q^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{ou} \quad T_0=T\left(1-\frac{1}{4Q^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On peut aussi passer par la mesure de τ pour trouver ω_0 via

$$\tau=\frac{T}{\delta} \quad\Rightarrow\quad \omega_0=\frac{2Q}{\tau}.$$

- Lorsque vous établissez un bilan en puissance (instantané) ou un bilan en énergies (entre 2 instants à préciser), il est impératif de **préciser explicitement** le sens de vos notations : puissance *reçue* ou *cédée*, stock d'énergie électrique (condensateur) ou magnétique (bobine) quantité d'énergie reçue/cédée entre 2 instants (indispensable pour l'effet Joule car il n'y a pas de stock dans une résistance). La question a été très mal traitée par l'ensemble de la classe.

➔ Partie III

- Pour calculer une **impédance équivalente**, on peut utiliser directement les règles d'association série-dérivation vues et démontrées en cours, sans les redémontrer (avec un schéma équivalent ou une phrase d'explication la première fois).
- **IL EST INUTILE DE DÉVÉLOPPER UNE EXPRESSION D'IMPÉDANCE SI L'ON NE SAIT PAS À QUOI CELA VA SERVIR...** (et oui encore une chose que j'ai bien dite clairement en cours). remettre sous le même dénominateur, puis sous forme polynômiale, multiplier par la quantité conjuguée etc, tout cela est en général **inutile**. Alors ne soyez pas masochiste, ne vous créez pas des difficultés superflues, il y en a déjà.
- Le signal recherché sous sa forme sinusoïdale $i(t)=I_m\cos(\omega t+\varphi)$ est obtenu par la partie réelle de la forme complexe $\underline{i}(t)=\underline{I}e^{j\omega t}$ certes, mais en général après l'avoir mise sous forme polaire : calcul de MODULE puis ARGUMENT.
Mise-à-part pour le cas du calcul de i_2 à la question 2., c'était la méthode la plus efficace.
- J'ai encore vu dans pas mal de copies l'assertion suivante, aberrante d'un point-de-vue mathématique (ainsi que sur le plan des dimensions) :

$$\frac{L\omega}{r}\gg 1 \quad\Rightarrow\quad \frac{L\omega}{r}\approx L\omega \qquad \text{...!!!}$$

- **Ne pas utiliser les nombres complexes pour calculer des énergies ou des puissances (grandeurs quadratiques).** Cela est réservé aux initiés... (cf programme de SPE).