

# MÉCANIQUE ET OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE

## I. Étude d'un traîneau à chiens sur la glace

(d'après Mines Ponts PC 2019)

### I.1. Trajectoire rectiligne

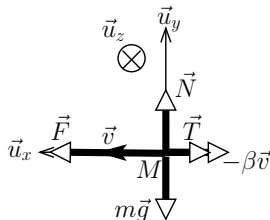
1. Le Théorème de la Résultante Cinétique (TRC) appliqué au traîneau dans le référentiel terrestre  $\mathcal{R}$  supposé galiléen s'écrit

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} = \vec{F} + m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T} - \beta\vec{v},$$

où  $\vec{v}$  représente la vitesse du centre d'inertie  $M$  du traîneau par rapport à  $\mathcal{R}$ .

On se place à l'état de repos donc  $\vec{v} = \vec{0}$  et

$$\vec{0} = \vec{F} + m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T}.$$



La piste étant horizontale, les forces sont disposées comme ci-dessus. On projette respectivement selon  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_y$ ,

$$0 = F - T \tag{1}$$

$$0 = -mg + N \tag{2}$$

avec  $T = \|\vec{T}\|$  et  $N = \|\vec{N}\|$ , ce qui permet d'écrire  $F = T$  et  $N = mg$ . Or la loi de Coulomb dans le cas non glissant s'écrit

$$T < fN \Rightarrow F < fmg.$$

Ainsi, la force minimale pour sortir de cet état non glissant et mettre en mouvement le traîneau est  $F_{\min} = fmg = 2,5 \times 10^2 \text{ N}$ .

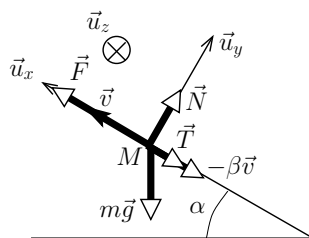
2. Les forces se distribuent maintenant comme ci-dessous.

$$0 = F - T - mg \sin \alpha \tag{3}$$

$$0 = -mg \cos \alpha + N \tag{4}$$

d'où  $F = T + mg \sin \alpha < fN + mg \sin \alpha$  avec  $N = mg \cos \alpha$ . Finalement

$$F < F'_{\min} = f' mg \text{ avec } f' = f \cos \alpha + \sin \alpha.$$



On peut d'ailleurs noter que cette équivalence est aussi valable dans le cas où il y a mouvement selon  $\vec{u}_x$ , car on obtient alors :

$$m\ddot{x} = F - f' mg - \beta\dot{x} \text{ avec } f' = f \cos \alpha + \sin \alpha \text{ et } f' = f \text{ si } \alpha = 0.$$

3. On note  $\vec{v} = v\vec{u}_y$  avec  $v = \dot{x} > 0$  correspondant à la norme de la vitesse car le mouvement est pris dans le sens positif. L'équation ci-dessus s'écrit donc

$$m\dot{v} = F - f' mg - \beta v \Leftrightarrow \dot{v} + \frac{1}{\tau} v = \frac{F}{m} - fg \text{ avec } \tau = \frac{m}{\beta}$$

le temps caractéristique associé au système et au frottement fluide qu'il subit.

4. L'équation différentielle ci-dessus est linéaire à coefficients constants, du premier ordre. La solution générale s'écrit  $v(t) = \lambda e^{-\frac{t}{\tau}} + v_p$ , avec  $v_p$  une solution particulière que l'on peut chercher constante, et donc qui vérifie

$$0 + \frac{1}{\tau} v_p = \frac{F}{m} - fg \Leftrightarrow v_p = \frac{F - fmg}{\beta}.$$

On remarque que  $v(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} v_p$  donc il existe une vitesse limite  $v_\ell = v_p$ . La vitesse initiale étant nulle, on a

$$v(0) = 0 = \lambda + v_p \text{ d'où } v(t) = v_\ell (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \text{ et } v_\ell = \frac{F - fmg}{\beta}.$$

5. À la date  $t_1$ , on a  $v_\ell - v(t_1) = 0,05 v_\ell$ , donc

$$v_\ell (1 - e^{-\frac{t_1}{\tau}}) = 0,95 v_\ell \Leftrightarrow e^{-\frac{t_1}{\tau}} = 0,05 \Leftrightarrow t_1 = -\tau \ln 0,05 \Leftrightarrow \beta = \frac{m \ln 20}{t_1} = \underline{3,0 \times 10^2 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}}.$$

On en déduit

$$F = \beta v_\ell + fmg = \underline{1,14 \times 10^3 \text{ N}}.$$

### I.2. Mouvement circulaire uniforme

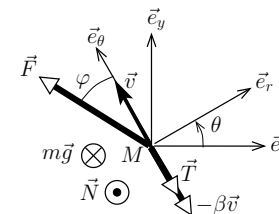
6. Pour un mouvement circulaire uniforme horizontal de vitesse  $\vec{v}_0$  et de rayon  $R$ , l'accélération de  $M$  est centripète et vaut dans la base cylindrique  $\vec{a} = -R\dot{\theta}^2 \vec{u}_r = -\frac{v_0^2}{R} \vec{u}_r$  car  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_\theta = R\dot{\theta} \vec{u}_\theta$ .

Le TRC s'écrit toujours  $m\vec{a} = \vec{F} + m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T} - \beta\vec{v}$ , où les forces sont disposées comme ci-contre. En projection selon  $\vec{u}_r$ ,  $\vec{u}_\theta$  et  $\vec{u}_z$  on obtient respectivement

$$-m \frac{v_0^2}{R} = -F \sin \varphi \tag{5}$$

$$0 = F \cos \varphi - T - \beta v_0 \tag{6}$$

$$0 = -mg + N \tag{7}$$



7. D'après l'Eq. (7) et la loi de Coulomb dans le cas glissant :  $T = fN = fmg$ . En faisant le quotient des Eqs. (5)-(6) on obtient

$$\frac{F \sin \varphi}{F \cos \varphi} = \frac{mv_0^2}{R(fmg + \beta v_0)} \Leftrightarrow \tan \varphi = \frac{v_0^2}{R(fg + \beta v_0/m)}. \tag{8}$$

On peut au contraire éliminer  $\varphi$  en élevant au carré les mêmes équations :

$$F^2 \sin^2 \varphi + F^2 \cos^2 \varphi = m^2 \frac{v_0^4}{R^2} + (fmg + \beta v_0)^2 \Leftrightarrow F = \sqrt{m^2 \frac{v_0^4}{R^2} + (fmg + \beta v_0)^2}. \tag{9}$$

8. a) L'Eq. (9) indique que pour  $v_0$  fixée, la force  $F$  décroît lorsque  $R$  croît. Donc les courbes sont **d'autant plus hautes que  $R$  est petit**.  
 b) Dans l'Eq. (9), le terme lié à la courbure est  $m^2 \frac{v_0^4}{R^2}$ . Ce terme disparaît lorsque  $R \rightarrow \infty$ , c'est-à-dire en trajectoire rectiligne. Pour  $R = 30 \text{ m}$  on raisonne sur la 2ème courbe en partant du bas. On observe qu'elle est quasi-confondue à la courbe  $R = 40 \text{ m}$ , donc que les variations du terme de courbure n'ont que peu d'effet entre  $R = 30 \text{ m}$  et  $R = 40$ . On peut en déduire que pour  $R > 40 \text{ m}$  les courbes seraient totalement indiscernables. Donc la courbe est quasi identique à celle pour  $R \rightarrow \infty$ .  
 c) On raisonne sur la 1ère courbe en partant du haut. On lit  $F = 1100 \text{ N}$  pour  $v_0 \approx 2,7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . **Le maintien d'une traction du même ordre qu'en mouvement rectiligne implique donc une diminution sensible de la vitesse** ( $v_\ell \approx 3,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  pour une telle traction de  $F = 1140 \text{ N}$ ). Pour cette valeur de  $v_0$ , l'Eq. (8) conduit à  $\varphi = 19^\circ$ .

**II. Lunette astronomique à capteur numérique** (d'après Centrale TSI 2016)

1. a) L'angle maximal est obtenu pour une distance minimale  $R_J - R_T$  lors de l'alignement Soleil-Terre-Jupiter. Pour des angles aussi faibles, on peut assimiler le secteur circulaire d'angle  $\alpha_0$  et de rayon  $R_J - R_T$  à un triangle rectangle avec

$$\tan \alpha_0 \approx \alpha_0 = \frac{d_J}{R_J - R_T} = \underline{45,8''}.$$

- b) Du fait de l'alignement, l'attraction gravitationnelle de Jupiter sur la Terre s'oppose directement à celle exercée par le Soleil, d'où l'appellation d'*opposition*.

2. La 3ème loi de Kepler nous donne

$$T_J = T_T \left( \frac{R_J}{R_T} \right)^{3/2} = \underline{4,33 \times 10^3 \text{ j.}}$$

Il en découle que la Terre effectue plusieurs tours autour du Soleil lorsque Jupiter en fait un. Ainsi, en partant d'une opposition on obtient l'opposition suivante au bout d'un peu plus d'une révolution terrestre. Soit  $\Delta t$  la durée correspondante, l'angle décrit par chacune des planètes diffère de  $2\pi$  et peut s'exprimer en fonction des vitesses angulaires :

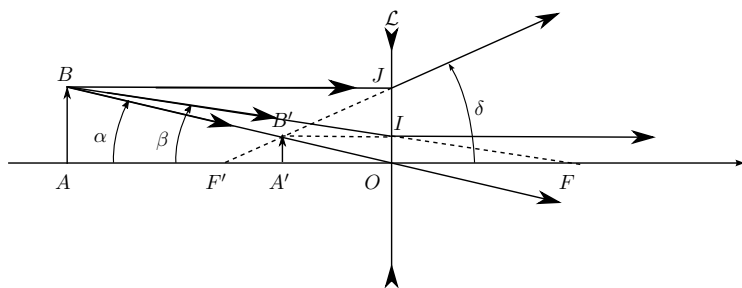
$$\frac{2\pi}{T_T} \Delta t = \frac{2\pi}{T_J} \Delta t + 2\pi \Leftrightarrow \Delta t = \left( \frac{1}{T_T} - \frac{1}{T_J} \right)^{-1} = \underline{399 \text{ j.}}$$

3. Dans les conditions de Gauss, les rayons utiles sont dits paraxiaux, c'est-à-dire **peu inclinés** par rapport à l'axe optique, et de **point d'incidence sur la lentille proche de l'axe** optique. dans ces conditions la lentille est un instrument approximativement *stigmatique* (l'image d'un point objet est ponctuelle), et **aplanétique** (un objet transverse aura une image transverse).

L'image  $B'$  de  $B$  est obtenue par intersection d'au moins deux rayons remarquables, parmi :

- le rayon passant par le centre de la lentille qui est non dévié ;
- le rayon incident parallèle à l'axe qui émerge en passant par le foyer image ;
- le rayon incident passant par le foyer objet, qui émerge parallèle à l'axe.

Le point  $A'$  est obtenu par aplanétisme.



4. On définit les angles  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\delta$  sur le schéma ci-dessus, en référence à l'axe optique (sens positif conventionnel,  $\alpha < 0$ ,  $\beta < 0$  et  $\delta > 0$ ).

$$\tan \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{OA'}} \quad \text{et} \quad \tan \beta = \frac{\overline{AB}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{OI}}{\overline{FO}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{FO}}.$$

En faisant le quotient de ces deux équations, on obtient

$$\frac{\overline{FA}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{OA'}} \Leftrightarrow \frac{\overline{FO} + \overline{OA}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{OA'}} \Leftrightarrow \frac{\overline{FO}}{\overline{OA}} + 1 = \frac{\overline{FO}}{\overline{OA'}} \Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}}.$$

Par ailleurs on obtient le grandissement avec

$$\tan \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{OA'}} \Leftrightarrow \gamma \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}}.$$

5. Les pixels étant de forme carrée, on obtient leur côté par  $\varepsilon_c = \sqrt{\frac{S_c}{N}} = \underline{5,60 \mu\text{m}}$ .

Les données de taille du capteur se traduisent par

$$d_c^2 = \ell_c^2 + h_c^2 \quad \text{et} \quad S_c = \ell_c h_c.$$

On peut en déduire la somme et la différence des côtés :

$$(\ell_c + h_c)^2 = d_c^2 + 2S_c \quad \text{et} \quad (\ell_c - h_c)^2 = d_c^2 - 2S_c \quad \text{donc,}$$

$$\ell_c + h_c = \sqrt{d_c^2 + 2S_c} \quad \text{et} \quad \ell_c - h_c = \sqrt{d_c^2 - 2S_c}, \quad \text{d'où finalement}$$

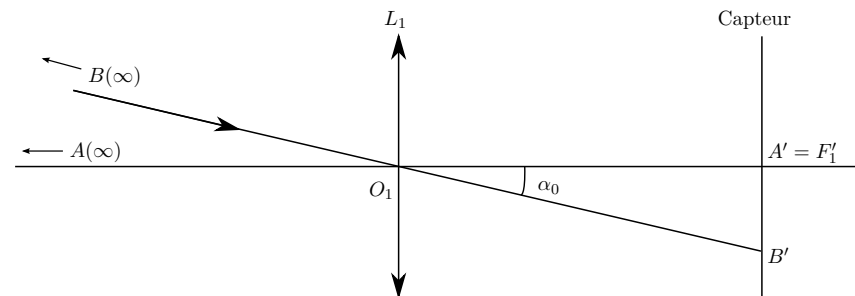
$$\ell_c = \frac{1}{2} \left( \sqrt{d_c^2 + 2S_c} + \sqrt{d_c^2 - 2S_c} \right) = \underline{3,59 \text{ mm}} \quad \text{et} \quad h_c = \frac{1}{2} \left( \sqrt{d_c^2 + 2S_c} - \sqrt{d_c^2 - 2S_c} \right) = \underline{2,69 \text{ mm}}.$$

6. Notons  $A$  le point de Jupiter situé sur l'axe optique de la lentille, et  $A'$  son image. La relation de Descartes s'écrit

$$\frac{1}{\overline{O_1A'}} - \frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{1}{f'_1} \Leftrightarrow \overline{O_1A'} = \left( \frac{1}{f'_1} - \frac{1}{R_J - R_T} \right)^{-1} = f'_1 \left( 1 - \frac{f'_1}{R_J - R_T} \right)^{-1}.$$

Or  $\frac{f'_1}{R_J - R_T} \sim 10^{-12} \lll 1$  donc  $\overline{O_1A'} \approx f'_1$  avec une approximation à  $10^{-10} \%$  près ! **L'image est donc dans le plan focal image et l'objet peut être considéré à l'infini.**

7. D'après la question précédente, le capteur est placé à la distance  $\overline{O_1A'} = f'_1 = 2350 \text{ mm}$  de l'objectif  $L_1$ .

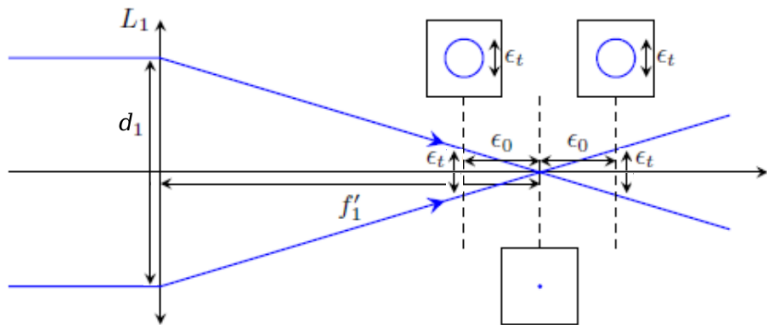


D'après la construction ci-dessus, où l'on suppose que l'on pointe l'axe optique sur un bord de Jupiter<sup>1</sup>, on obtient une taille d'image (en utilisant 1.a)) :

$$A'B' = f'_1 \tan \alpha_0 \approx \frac{f'_1 d_J}{R_J - R_T} = \underline{0,522 \text{ mm} = 93 \text{ pixels}}.$$

1. On obtiendrait le même résultat en pointant par exemple au centre de Jupiter, car pour des si petits angles  $2 \tan \frac{\alpha_0}{2} \approx \alpha_0 \approx \tan \alpha_0$ .

8. Le faisceau issu du point  $A$  de Jupiter à l'infini sur l'axe forme un cône derrière la lentille, dont la section par le plan transverse du capteur est un disque de rayon  $\varepsilon_t$  (en admettant que les rayons passés par le bord de la lentille arrivent bien sur le capteur malgré le tube  $\mathcal{T}_2$ , c'est-à-dire que  $\mathcal{T}_2$  ne diaphragme pas le faisceau), comme représenté ci-dessous.



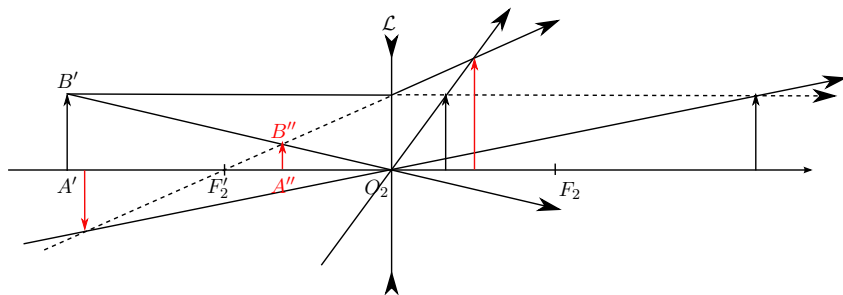
Le théorème de Thalès permet d'écrire, dans les deux cas, que  $\varepsilon_t = \varepsilon_0 \frac{d_1}{f'_1}$ .

9. L'image  $A'$  du point  $A$  sera vue nette même si le capteur est mal placé à condition que la tache lumineuse soit de taille inférieure à celle d'un pixel :

$$\varepsilon_t \leq \varepsilon_c \Leftrightarrow \varepsilon_0 \leq \frac{f'_1}{d_1} \varepsilon_c = 0,0560 \text{ mm}.$$

La latitude de mise-au-point est de largeur 0,112 mm ce qui est **très faible**, donc le réglage de la position du capteur doit être **très précis** et nécessite une vis micrométrique.

10. D'après ce qui précède, l'image intermédiaire  $A'B'$  de Jupiter par  $L_1$  est située au plan focal image de  $L_1$ , donc  $A' = F'_1$ . On note  $A''B''$  son image par  $L_2$ , avec  $A' \xrightarrow{L_2} A''$  et  $B' \xrightarrow{L_2} B''$ . Pour savoir où placer  $L_2$  par rapport à  $A' = F'_1$ , on peut raisonner sur le schéma ci-dessous, qui présente toutes les possibilités en terme d'image, à savoir trois possibilités (l'objet est tracé en noir, l'image en rouge).



- Si  $A'$  est à gauche de  $L_2$  (objet réel), alors l'image est aussi à gauche (virtuelle).
- Si  $A'$  est à droite de  $F_2$  (objet virtuel), alors l'image est à gauche de  $L_2$  (toujours virtuelle).
- Si  $A'$  est entre  $O_2$  et  $F_2$  (objet virtuel), alors l'image est à droite de  $L_2$  (réelle).

Seule la dernière configuration est donc compatible avec la situation, puisque l'on veut une image réelle sur le capteur. De plus la construction montre que l'image est alors à droite de l'objet, donc le capteur doit être à droite de  $F'_1$ . Finalement  $F'_1$  est entre  $O_2$  et le capteur.

Démonstration plus complète :

On cherche une image réelle donc  $\overline{O_2A''} > 0$ . D'après la formule de Descartes on a donc

$$\frac{1}{f'_2} + \frac{1}{\overline{O_2A'}} = \frac{1}{\overline{O_2A''}} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\overline{O_2A'}} > -\frac{1}{f'_2} > 0 \Leftrightarrow \boxed{0 < \overline{O_2A'} < -f'_2}.$$

Donc  $A' = F'_1$  est situé entre  $O_2$  et  $F_2$ .

De plus, puisque  $f'_2 < 0$ , la relation de Descartes donne aussi dans ces conditions

$$\frac{1}{\overline{O_2A''}} - \frac{1}{\overline{O_2A'}} = \frac{1}{f'_2} < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\overline{O_2A''}} < \frac{1}{\overline{O_2A'}} \Leftrightarrow \boxed{\overline{O_2A''} > \overline{O_2A'} > 0}.$$

L'image est donc à droite de l'objet. D'où la même conclusion.

11. La distance  $\overline{O_2A''} = D_{2c}$  est imposée, ainsi que le grandissement

$$\gamma = \frac{A'B'}{AB} = \frac{\overline{O_2A''}}{\overline{O_2F'_1}} = 3,00$$

en réutilisant la relation de Descartes trouvée en 4. (le schéma de la question 10. nous a en effet montré que ce grandissement est positif). On en déduit la distance focale par

$$\frac{1}{f'_2} = \frac{1}{\overline{O_2A''}} - \frac{1}{\overline{O_2A'}} \Leftrightarrow f'_2 = \left( \frac{1}{\overline{O_2A''}} - \frac{1}{\overline{O_2A'}} \right)^{-1} = \overline{O_2A''} \left( 1 - \frac{\overline{O_2A''}}{\overline{O_2F'_1}} \right)^{-1}$$

$$\text{d'où } \boxed{f'_2 = \frac{D_{2c}}{1 - \gamma}} = \underline{-100 \text{ mm}}.$$

On en déduit ensuite

$$D_{12} = \overline{O_1O_2} = \overline{O_1F'_1} + \overline{F'_1O_2} = f'_1 - \frac{\overline{O_2A''}}{\gamma} \quad \text{d'où } \boxed{D_{12} = f'_1 - \frac{D_{2c}}{\gamma}} = \underline{2,28 \text{ m}}.$$

12. On a montré en 7. que la première lentille donne

$$A'B' = f'_1 \tan \alpha_0.$$

En associant le dispositif de Barlow on observe l'image finale de taille

$$\boxed{A''B'' = \gamma A'B' = \gamma f'_1 \tan \alpha_0},$$

ce qui est équivalent à l'utilisation d'une simple lentille  $L_1$  de distance focale  $\gamma f'_1 = 3f'_1$ , d'où l'appellation de *tripleur de focale* pour ce dispositif qui permet de limiter l'encombrement de la lunette.