

THERMODYNAMIQUE

I. Moteur à réservoir d'air comprimé (d'après ENSAIT PC 1999)

A - Étude du réservoir à air comprimé

1. Il faut réaliser la **détente lentement** pour que la détente puisse être isotherme : il faut **laisser le temps aux transferts thermiques** de se faire afin que la température du système puisse rester égale à celle du thermostat (atmosphère) T_0 . La durée caractéristique de la transformation doit être grande devant la durée caractéristique des échanges thermiques.

2. a) Comme la détente est isotherme et le Gaz Parfait (GP), l'énergie interne du gaz dans le réservoir ne varie pas en vertu de la 1^{ère} loi de Joule. Ainsi, le 1er principe de la thermodynamique appliqué au {gaz dans le réservoir} donne :

$$0 = -W_{iso} + Q \Rightarrow Q = W_{iso}$$

car il n'y a pas de mouvement d'ensemble du gaz (statique au début et à la fin) et en négligeant la variation de son énergie potentielle.

b) 2ème principe de la thermodynamique appliqué au {gaz dans le réservoir} sur la détente :

$$\Delta S = \frac{Q}{T_0} + S_c \Rightarrow S_c = \Delta S - \frac{W_{iso}}{T_0}$$

c) Comme $s_c \geq 0$ avec égalité ssi la transformation est réversible, on a :

$$\Delta S \geq \frac{W_{iso}}{T_0} \Leftrightarrow W_{iso} \leq T_0 \Delta S$$

L'égalité, et donc le **maximum de travail récupérable, est obtenu pour une transformation réversible.**

3. On calcule directement le travail des forces de pression fourni au système pour la transformation isotherme, qui est réversible¹ :

$$W_{iso,max} = + \int_1^2 p_r dV_r = \int_1^2 nRT_0 \frac{dV_r}{V_r} = p_{r1} V_{r1} \int_1^2 \frac{dV_r}{V_r} = p_{r1} V_{r1} \ln \left(\frac{V_{r2}}{V_{r1}} \right)$$

Avec l'équation d'état du GP on réexprime

$$p_{r1} V_{r1} = nRT_0 = p_{r2} V_{r2} \Leftrightarrow \frac{V_{r2}}{V_{r1}} = \frac{p_{r1}}{p_{r2}} \Rightarrow W_{iso,max} = p_{r1} V_{r1} \ln \left(\frac{p_{r1}}{p_{r2}} \right) = 3,2 \text{ MJ} > 0$$

4. Sur un chemin réversible et donc mécaniquement quasi-statique, et adiabatique, le premier principe s'écrit (pour un GP soumis exclusivement à des forces de pression).

$$dU = \delta Q_{rev} + \delta W_{rev} = 0 - P dV$$

Pour un GP $PV = nRT$ et $dU = C_v dT = \frac{nR}{\gamma-1} dT$ donc

$$\frac{nR}{\gamma-1} dT + \frac{nRT}{V} dV = 0 \Leftrightarrow nR \frac{dT}{T} + (\gamma-1)nR \frac{dV}{V} = nR d \ln (TV^{\gamma-1}) = 0$$

D'où $TV^{\gamma-1} = \text{constante}$, et en introduisant la loi des GP, on obtient aussi $PV^\gamma = \text{constante}$ et $T^\gamma P^{1-\gamma} = \text{constante}$.

1. Si on n'admet pas ce résultat, on peut le calculer ainsi : $W_{iso,max} = T_0 \Delta S$ puis calculer la variation d'entropie d'un GP pour une isotherme en fonction des pressions.

5. On peut là encore faire un calcul direct du travail pour la détente adiabatique réversible, via

$$W_{adi,max} = + \int_1^2 p_r dV_r = \int_1^2 P_{r1} V_{r1}^\gamma \frac{dV_r}{V_r^\gamma} = \dots$$

ou utiliser le premier principe :

$$\Delta U = \frac{nR}{\gamma-1} \Delta T_r = -W_{adi,max} + 0 \Rightarrow W_{adi,max} = \frac{p_{r1} V_{r1} - p_{r2} V_{r2}}{\gamma-1} = \frac{p_{r1} V_{r1}}{\gamma-1} \left(1 - \frac{p_{r2} V_{r2}}{p_{r1} V_{r1}} \right)$$

Or, d'après la loi de LAPLACE :

$$p_{r2} V_{r2}^\gamma = p_{r1} V_{r1}^\gamma \Rightarrow \frac{V_{r2}}{V_{r1}} = \left(\frac{p_{r1}}{p_{r2}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \Rightarrow \frac{p_{r2} V_{r2}}{p_{r1} V_{r1}} = \left(\frac{p_{r2}}{p_{r1}} \right)^{1-\frac{1}{\gamma}}$$

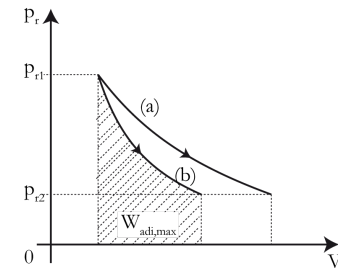
D'où :

$$W_{adi,max} = \frac{p_{r1} V_{r1}}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{p_{r2}}{p_{r1}} \right)^{1-\frac{1}{\gamma}} \right] = 1,84 \text{ MJ} < W_{iso,max}$$

6. L'isotherme est donnée par $p_r V_r = cte$ et l'adiabatique (réversible) par $p_r V_r^\gamma = cte$ avec $\gamma > 1$. On a alors le diagramme de WATT ci-contre pour une détente qui va de p_{r1} à p_{r2} . Les travaux récupérables représentent l'**aire sous la courbe** des transformations. On voit graphiquement que

$$W_{iso,max} > W_{adi,max}$$

ce qui est conforme à ce que nous avons calculé.



7. L'unité S.I. de a est $[W.K^{-1}]$.

8. Premier principe entre t et $t + dt$ appliqué au {gaz dans le réservoir} :

$$dU = \frac{nR}{\gamma-1} dT_r = -p_r dV_r + P_{th} dt = -\frac{nRT_r}{V_r} dV_r - a(T_r - T_0) dt$$

Alors :

$$\frac{nR}{\gamma-1} \frac{dT_r}{dt} = -\frac{nRT_r}{V_r} \frac{dV_r}{dt} - a(T_r - T_0)$$

D'où :

$$\frac{dT_r}{dt} + \frac{a(\gamma-1)}{nR} (T_r - T_0) = -(\gamma-1) \frac{T_r}{V_r} \frac{dV_r}{dt}$$

On obtient bien l'équation différentielle demandée :

$$\frac{dT_r}{dt} + \frac{T_r - T_0}{\tau'} = \xi \frac{T_r}{V_r} \frac{dV_r}{dt} \text{ avec } \tau' = \frac{p_{r1} V_{r1}}{a(\gamma-1) T_0} \text{ et } \xi = 1 - \gamma$$

9. La constante τ représente la **durée caractéristique de la détente**, alors que τ' est la **constante de temps caractéristique des transferts thermiques** à travers la paroi du cylindre.

Ainsi, si $\tau \gg \tau'$ la détente est lente par rapport aux transferts thermiques donc la transformation tend à être **isotherme**.

Au contraire, lorsque $\tau \ll \tau'$, la détente est rapide par rapport aux transferts thermiques donc la transformation tend à être **adiabatique**.

10. Au minimum de T_r , sa dérivée est nulle. L'équation différentielle devient alors, compte tenu du fait que $\frac{dV_r}{dt} = \frac{V_{r1}}{\tau}$:

$$0 + \frac{T_{rm} - T_0}{\tau'} = \xi \frac{T_{rm}}{V_{r1}(1 + t_m/\tau)} \frac{V_{r1}}{\tau} = \frac{\xi T_{rm}}{t_m + \tau} \Leftrightarrow \boxed{t_m = \xi \tau' \frac{T_{rm}}{T_{rm} - T_0} - \tau}$$

11. On lit $\boxed{T_{rm} = 1,7 \times 10^2 \text{ K}}$, ce qui donne $\boxed{t_m = 15 \times 10^2 \text{ s}}$ et donc $\boxed{p_{rm} \approx 7 \text{ bar}}$.
12. L'expression de W_k est identique à celle calculée en question 5. pour la loi de Laplace, en remplaçant simplement γ par k . Ainsi :

$$\boxed{W_k = \frac{p_{r1} V_{r1}}{k - 1} \left[1 - \left(\frac{p_{r2}}{p_{r1}} \right)^{1 - \frac{1}{k}} \right]} = 1,91 \text{ MJ}$$

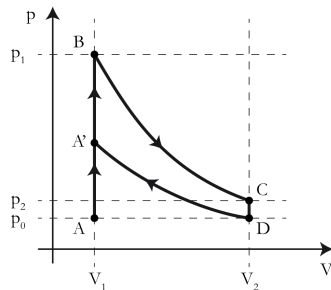
On trouve bien $W_{adi,max} < W_k < W_{iso,max}$.

B - Étude du moteur

13. La pression dans la chambre est minimale au moment de l'échappement lors de la mise en contact avec l'air atmosphérique, et égale à P_0 . Pour que le moteur fonctionne il faut donc que la pression à l'admission depuis le réservoir soit nettement supérieure à P_0 sinon le piston ne peut être repoussé sur une course non nulle. Or la pression à l'admission va progressivement baisser à chaque cycle à mesure que le réservoir se vide.

14. *Remarque : il faut noter que, comme l'indique la légende de la Figure 6 dans l'énoncé, le graphe ne représente pas l'état du système (qui n'effectue pas un cycle et sort sous pression du réservoir), mais les valeurs de (p, V) mesurées dans la chambre à l'instant t.*

AB correspond à l'**admission** d'air comprimé dans le cylindre (piston au point mort extérieur)
 BC à la phase de **descente du piston**
 CD à l'**échappement** de l'air dans l'atmosphère (piston au point mort intérieur)
 DA' correspond à la phase de **remontée du piston**.



15. La descente BC du piston étant adiabatique réversible, on applique la loi de LAPLACE pour l'air situé dans le cylindre (assimilé à un GP) :

$$\boxed{p_2 = p_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma}$$

La condition $p_2 \geq p_0$ donne :

$$\boxed{p_1 \geq p_0 \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^\gamma} = 25,2 \text{ bar}$$

16. La loi de Laplace donne également :

$$T_2 V_2^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1} \Rightarrow \boxed{T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1}} = 139 \text{ K}$$

17. Dans l'état final de cette nouvelle détente, la pression est uniforme dans l'atmosphère et le cylindre ouvert sur l'atmosphère. Ainsi $\boxed{p_3 = p_0}$.
 La loi de Laplace donne alors :

$$\boxed{T_3 = T_2 \left(\frac{p_2}{p_0} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}}$$

En remplaçant T_2 et p_2 par leurs expressions il reste :

$$\boxed{T_3 = T_1 \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}}$$

18. On calcule les travaux directement grâce à la loi de Laplace.
 — Phase de descente (on exclut la partie de 2 à 3 qui ne transmet pas de travail au piston mais directement à l'air extérieur) :

$$W_d = - \int_1^2 p dV = - \int_1^2 p_1 V_1^\gamma \frac{dV}{V^\gamma} = -p_1 V_1^\gamma \left[\frac{V^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right]_1^2$$

$$\Rightarrow \boxed{W_d = \frac{p_1 V_1^\gamma}{\gamma-1} \left(V_2^{1-\gamma} - V_1^{1-\gamma} \right) = \frac{p_1 V_1}{\gamma-1} \left(\left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{1-\gamma} - 1 \right)} = -75 \text{ J}.$$

— Phase de remontée : c'est le même calcul en permutant les indices de volume et en partant de la pression p_0 cette fois.

$$\boxed{W_r = \frac{p_0 V_2^\gamma}{\gamma-1} \left(V_1^{1-\gamma} - V_2^{1-\gamma} \right) = \frac{p_0 V_2}{\gamma-1} \left(\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{1-\gamma} - 1 \right)} = 19 \text{ J}.$$

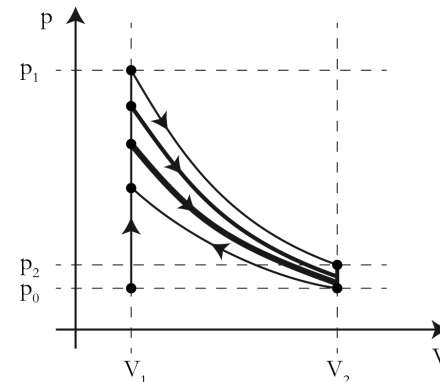
19. Pour l'air dans la chambre, le piston représente l'extérieur, donc le travail qu'il fournit est celui reçu par l'air calculé précédemment. Comme il n'y a pas de travail du piston au cours des phases d'échappement et d'admission (le piston reste immobile dans ces phases), alors :

$$\boxed{W_T = W_d + W_r} = -56 \text{ J} < 0$$

20. L'arrêt du moteur se produit pour : $W_T = 0 \Leftrightarrow W_d = -W_r \Leftrightarrow p_1 V_1^\gamma = p_0 V_2^\gamma$.
 D'où :

$$\boxed{p_{1,min} = p_0 \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^\gamma} = 25,2 \text{ bar}$$

Remarque : il s'agit de la valeur de p_1 trouvée précédemment, pour laquelle $p_2 = p_0$, c'est-à-dire correspondant à deux courbes de détente et de compression confondues sur le cycle (dont l'aire est donc nulle). En effet, une fois ce premier « cycle² » parcouru, la pression remonte à une valeur inférieure à p_1 car il y a de moins en moins d'air dans le réservoir au fur et à mesure des admissions d'air dans le cylindre. Le « cycle » est alors de plus en plus serré, le travail fourni par le piston est de moins en moins important au cours du temps et le moteur s'arrête lorsque la pression à l'issue de la descente du piston vaut p_0 .



2. Ce n'est pas réellement un cycle puisque l'on ne redémarre pas à la même pression.