THERMODYNAMIQUE

CALCULATRICES AUTORISÉES

I. Moteur à réservoir d'air comprimé

Aucune connaissance sur le cours sur les machines thermiques n'est nécessaire pour traiter ce problème.
Le moteur à air comprimé présenté dans ce problème est un moteur à piston, alimenté par de l'**air comprimé que l'on assimile dans tout le problème à un gaz parfait**. L'air comprimé provient d'un réservoir non représenté sur les schémas, de volume $V_{r1} = 0,2\,\mathrm{m}^3$ ayant une pression initiale $p_{r1} = 100\,\mathrm{bar}$ et une température initiale $T_{r1} = T_0$.

La partie A- étudie le fonctionnement du réservoir à air comprimé et la partie B- étudie le fonctionnement du moteur, alimenté par ce réservoir. Les deux parties A- et B- sont très largement indépendantes : n'hésitez à passer à la partie B- en cas de blocage sur la A-.

Données pour l'ensemble du problème :
constante des gaz parfaits : $R = 8,31\,\mathrm{J.mol^{-1}.K^{-1}}$;
pression atmosphérique : $p_0 = 1,0\,\mathrm{bar} = 1,0.10^5\,\mathrm{Pa}$;
température de l'atmosphère, supposée constante : $T_0 = 300\,\mathrm{K}$;
rapport des capacités thermiques massiques de l'air : $c_p/c_v = \gamma = 1,4$;

A - Étude du réservoir à air comprimé

Dans cette étude où l'air subit des détentes dans le réservoir à air comprimé, on pourra imaginer que l'air comprimé du réservoir est placé dans un cylindre fermé par un piston mobile ; la fin de la détente correspondant à une pression de l'air égale à $p_{r2} = 20\,\mathrm{bar}$ (cette valeur finale n'est aussi valable que pour la partie A -). On rappelle que l'on considérera l'air comme un gaz parfait.

a- Détente isotherme

On suppose dans cette section **a-** que l'air du réservoir est détendu de manière isotherme à la température T_0, égale à celle de l'atmosphère extérieure.

1. La détente doit-elle être réalisée lentement ou rapidement ? Justifier.

2. **a)** On note W_{iso} le travail récupérable par l'extérieur (fourni par l'air du réservoir) lors de la transformation. Exprimer le transfert thermique Q reçu par l'air du réservoir en fonction de W_{iso}.

b) Relier l'expression de l'entropie créée S_c par l'air du réservoir, au cours de la détente, à W_{iso}, T_0 et à la variation d'entropie du même système ΔS.

c) En déduire que le travail récupérable sera maximal lorsque la transformation est réversible.

3. Déterminer le travail $W_{iso,max}$ maximal récupérable au cours de cette détente, en fonction de p_{r1}, p_{r2} et V_{r1}. Évaluer numériquement $W_{iso,max}$.

b- Détente adiabatique

On suppose dans cette section **b-** que l'air est détendu de manière adiabatique, et non plus de manière isotherme comme au **a-**. On admettra que le travail récupérable est à nouveau maximal lorsque la transformation qui a lieu est réversible.

4. Démontrer la loi de Laplace pour la transformation adiabatique réversible d'un gaz parfait (γ constant).

5. Calculer le travail mécanique $W_{adi,max}$ maximal récupérable (fourni par l'air du réservoir) au cours d'une telle détente. Évaluer numériquement $W_{adi,max}$.

6. Sur un même diagramme de WATT (p, V), représenter les détentes subies par le gaz du réservoir entre l'état 1 et l'état 2, dans les deux situations réversibles (a) isotherme et (b) adiabatique. Indiquer comment on peut y lire graphiquement $W_{iso,max}$ et $W_{adi,max}$. Comparer les travaux dans les deux situations.

c- Détente réelle

En réalité, l'expérience montre que l'air ne subit ni une détente isotherme ni une détente adiabatique ; un transfert thermique à travers les parois du réservoir accompagne la détente. Ce transfert est modélisé par une relation du type :

$$P_{th} = -a(T_r - T_0) \tag{1}$$

où P_{th} est la puissance thermique reçue par l'air, T_r est la température supposée uniforme de cet air au sein du réservoir ; a est une constante.

7. Quelle est l'unité S.I. de la constante a ?

La détente étant supposée mécaniquement quasi-statique, on étudie la transformation élémentaire subie par l'air entre les instants t et $t + dt$.

8. Réaliser un bilan énergétique sur la transformation élémentaire de l'air dans le réservoir, pour obtenir une relation différentielle liant les variables T_r, V_r et t qui sont respectivement la température de l'air dans le réservoir, le volume occupé par cet air et le temps t. Mettre l'équation différentielle sous la forme :

$$\frac{dT_r}{dt} + \frac{T_r - T_0}{\tau'} = \xi \frac{T_r}{V_r}\frac{dV_r}{dt} \tag{2}$$

où τ' et ξ sont des constantes à exprimer à partir de a, γ, p_{r1}, V_{r1} et T_0.

Résoudre cette équation différentielle (on ne demande pas de le faire) nécessite de se donner une loi d'évolution du volume V_r avec t. On choisit la loi d'évolution suivante, où τ est une constante :

$$V_r = V_{r1}\left(1 + \frac{t}{\tau}\right) \tag{3}$$

9. Par des arguments physiques, justifier le choix de τ par rapport à τ', constante caractéristique du dispositif, pour retrouver :
- — la transformation isotherme ;
- — la transformation adiabatique.

La résolution de l'équation différentielle pour $\tau = 200\,\text{s}$ et $a = 5,0\,\text{S.I.}$ conduit aux graphes de la figure 1.

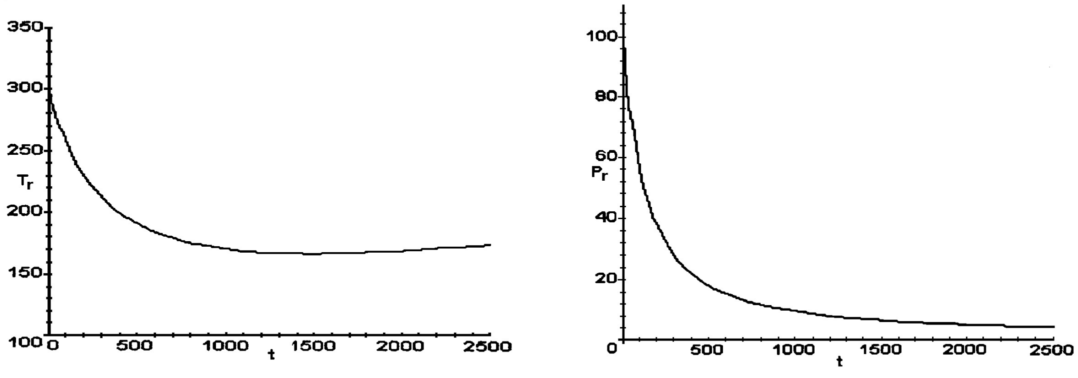

FIGURE 1 – À gauche : évolution de T_r (en K) en fonction du temps t (en s). À droite : évolution de p_r (en bar) en fonction du temps t (en s).

10. On appelle T_{rm} la température minimale et t_m l'instant pour lequel cette température est atteinte. Établir l'expression de t_m en fonction de T_{rm} et des constantes T_0, τ, τ' et ξ.

11. Évaluer T_{rm} graphiquement et en déduire t_m à l'aide de l'équation obtenue à la question **10.**. Déterminer alors graphiquement p_{rm}.

p_{rm} étant inférieure à p_{r2}, les variations de pression et de température au cours de la détente sont monotones. En conséquence, on modélise la transformation subie par le gaz par une loi, liant sa pression et son volume, du type $p_r V_r^k = cte$. Un ajustement des courbes donne $k = 1,3$.

12. En déduire, littéralement puis numériquement, le travail mécanique récupérable W_k au cours de la détente réelle.

B - Étude du moteur

Dans cette partie, on s'intéresse au moteur (moteur de marteau-piqueur par exemple) actionné par le gaz comprimé sortant du réservoir. On considère toujours ici l'air comme un gaz parfait.

Le principe de fonctionnement du moteur est illustré sur la figure 2. L'air comprimé arrive par la canalisation supérieure et ne peut pénétrer dans le cylindre que lorsque la bille est poussée par le petit ergot situé sur le piston. L'admission de l'air n'est donc possible que lorsque le cylindre est en « position haute » (point mort extérieur). Le cylindre étant doté de petites ouvertures, l'échappement n'est permis que lorsque le cylindre est en « position basse » (point mort intérieur).

Pour simplifier, on suppose que le remplissage est instantané (admission de matière dans le cylindre) lorsque le piston est situé au point mort extérieur ; le volume offert au gaz dans le cylindre est alors de $V_1 = 5,0\,\mathrm{cm}^3$. En fin d'admission, la température de l'air dans le cylindre est $T_1 = 350\,\mathrm{K}$. On suppose également que l'air s'échappe instantanément du cylindre (perte de matière dans le cylindre) lorsque le piston est au point mort intérieur ; le volume offert est alors de $V_2 = 50\,\mathrm{cm}^3$.
On suppose que lors de la descente du piston (et lors de la remontée), la transformation subie par le gaz est adiabatique et réversible.

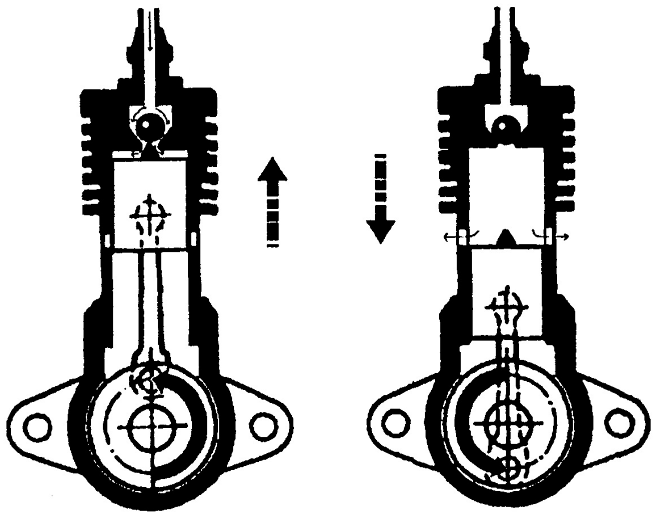

FIGURE 2 – Moteur à air comprimé. Schéma de gauche : piston au point mort extérieur, l'air pénètre dans le cylindre. Schéma de droite : piston au point mort intérieur, il y a échappement de l'air par les ouvertures latérales du cylindre.

13. Après plusieurs aller-retours, le moteur s'arrête. Expliquer succinctement pourquoi l'arrêt intervient avant que la pression du réservoir n'égale P_0 : pression atmosphérique.

14. Reproduire sur votre copie la figure 3 ci-contre représentant le premier « cycle » du moteur et la compléter : orienter le cycle, donner des noms aux différents points du diagramme (P, V) et préciser à quelles parties correspondent les différentes phases de fonctionnement du moteur (admission, échappement, remontée et descente du piston).

15. Si la pression en fin d'admission est p_1, quelle est son expression juste avant l'échappement : p_2 ?
Donner la condition (littéralement et numériquement) sur p_1 pour que l'on ait p_2 supérieure ou égale à la pression atmosphérique p_0.

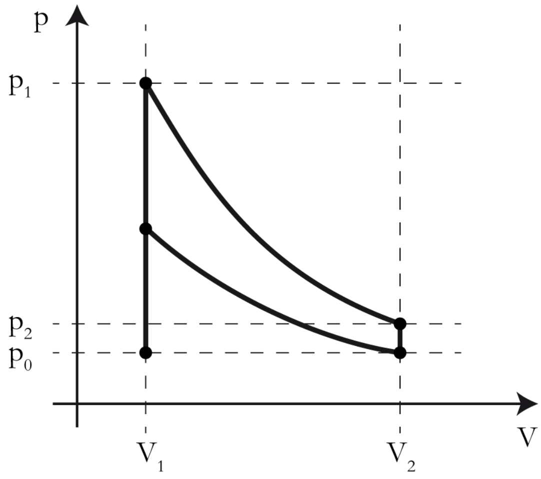

Figure 3 – Démarrage du moteur : premier aller-retour du piston. On représente la pression p dans le cylindre en fonction de son volume V.

16. Exprimer littéralement puis calculer numériquement la température juste avant l'échappement : T_2.

17. Si $p_2 > p_0$, l'air contenu dans le cylindre subit une nouvelle détente, au cours de l'échappement, qui s'opère dans l'air atmosphérique (mais le piston reste à son point mort intérieur). On admet que cette détente est de type adiabatique réversible pour l'air restant dans le cylindre. Quelle est sa pression finale p_3 ?
En déduire sa température T_3 en fonction de T_2, p_2, p_0 et γ, puis en fonction de T_1, p_1, p_0 et γ.

18. Déduire des questions précédentes le travail reçu par l'air contenu dans le cylindre :

- lorsque le piston passe du point mort extérieur au point mort intérieur (descente du piston) ; on donnera ce travail, noté W_d, en fonction de p_1, V_1, V_2 et γ.
- lorsque ce piston passe du point mort intérieur au point mort extérieur (remontée du piston) ; on donnera ce travail, noté W_r, en fonction de p_0, V_2, V_1 et γ.

19. Calculer numériquement le travail total W_T fourni par le piston au cours d'un aller-retour, au début du fonctionnement du moteur, c'est à dire pour $p_1 \approx 100\,\text{bar}$.

20. On estime que le moteur s'arrête lorsque ce travail W_T s'annule. En déduire la pression minimale p_{1min} du réservoir à air comprimé en deçà de laquelle le moteur s'arrête.

* * * Fin de l'épreuve * * *