

MÉCANIQUE

I. Modélisation de la chute d'un arbre

(d'après (inspiré de) Mines Ponts PC 2019)

I.1. Initiation d'un apprenti bucheron

- On applique le Théorème de la Résultante Cinétique (TRC) au bûcheron dans le référentiel terrestre \mathcal{R} supposé galiléen. À l'équilibre (le bûcheron le glisse pas), et la force exercée par le fil (qui est de masse nulle) sur le bûcheron est $-\vec{F}$:

$$\vec{0} = \vec{R}_2 + m\vec{g} - \vec{F} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_x : T_2 = F \cos \alpha \\ \vec{u}_z : N_2 = mg - F \sin \alpha \end{cases}$$

La condition de non glissement s'écrit

$$|T_2| = T_2 \leq fN_2 \Leftrightarrow F \cos \alpha \leq fmg - fF \sin \alpha \Leftrightarrow F \leq F_{\max} = \frac{fmg}{\cos \alpha + f \sin \alpha}$$

- De même on applique le TRC dans \mathcal{R} à l'arbre, en supposant la condition de non glissement établie. On obtient

$$\vec{0} = \vec{R}_1 + M\vec{g} + \vec{F} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_x : T_1 = -F \cos \alpha \\ \vec{u}_z : N_1 = Mg + F \sin \alpha \end{cases}$$

La condition de non glissement s'écrit

$$|T_1| = -T_1 \leq fN_1 \Leftrightarrow F \cos \alpha \leq fMg + fF \sin \alpha \Leftrightarrow F \leq \frac{fMg}{\cos \alpha - f \sin \alpha}$$

Or on a

$$F_{\max} = \frac{fmg}{\cos \alpha + f \sin \alpha} = \frac{m}{M} \frac{fMg}{\cos \alpha + f \sin \alpha} \leq \frac{m}{M} \frac{fMg}{\cos \alpha - f \sin \alpha} \leq \frac{fMg}{\cos \alpha - f \sin \alpha}$$

Donc cette seconde condition de non glissement est bien toujours vérifiée si la première l'est, c'est-à-dire si $F \leq F_{\max}$.

- Le poids de l'arbre admet un point d'application au centre de l'arbre. Le bras de levier est a et le signe négatif, d'où $\Gamma_g = -Mga$.
- Le bras de levier de la force \vec{F} est $OB \sin \alpha = \ell \cos \alpha \sin \alpha$, et il est positif. On obtient $\Gamma_B = F\ell \cos \alpha \sin \alpha$. On applique le Théorème du Moment Cinétique Scalaire (TMCS) à l'arbre par rapport à l'axe fixe (O, \vec{u}_y) . Le moment des actions de contact est nul car elles sont appliquées au point O sur l'axe. À l'équilibre on a donc

$$0 = \Gamma_g + \Gamma_B \Leftrightarrow F_{\min} = \frac{Mga}{\ell \cos \alpha \sin \alpha}$$

Si F est supérieure à cette valeur, alors $\Gamma_g + \Gamma_B > 0$ et donc l'arbre se mettra à tourner.

- Cette force $F_{\min} = \frac{2Mga}{\ell \sin(2\alpha)}$ est la plus faible possible lorsque $\sin(2\alpha)$ est maximal, donc pour $\alpha = \frac{\pi}{4}$.
- En temps normal, on voit que $F_{\min} < F_{\max}$ sur un large domaine d'angles α autour de $\frac{\pi}{4}$. Donc le bûcheron peut choisir relativement librement son point d'attache, donc a intérêt à prendre $\alpha = \frac{\pi}{4}$.
 - En temps de pluie on voit que pour tout α on a $F_{\max} < F_{\min}$, donc le bûcheron ne peut faire tomber l'arbre, il va glisser.
Une solution possible est d'augmenter la longueur ℓ de la corde pour abaisser la courbe de F_{\min} (trait fin) sans modifier F_{\max} (trait épais pointillé). On voit que le bûcheron va retrouver une plage d'angles α possible au delà de $\frac{\pi}{4}$.

I.2. Déracinement d'un arbre par une bourrasque

- Lorsque l'arbre est vertical, le moment résultant des actions du vent par rapport à l'axe (O, \vec{u}_y) s'écrit en parcourant la face gauche du tronc au point M de coordonnées $(x = -2a, y = 0, z)$:

$$\Gamma_v = \vec{u}_y \cdot \int_0^H \overrightarrow{OM} \wedge d\vec{F}_v = \vec{u}_y \cdot \int_0^H (-2a\vec{u}_x + z\vec{u}_z) \wedge C_x \rho_a U^2 2adz \vec{u}_x = \vec{u}_y \cdot \vec{u}_y C_x \rho_a U^2 2a \int_0^H z dz$$

$$\text{d'où } \Gamma_v = C_x \rho_a U^2 a H^2$$

Remarque : on peut trouver un point d'application $M_v(x = -a, y = 0, z = z_v)$ de la force du vent, dont la résultante est

$$\vec{F}_v = \int_0^H d\vec{F}_v = C_x \rho_a U^2 2aH \vec{u}_x,$$

en écrivant

$$\Gamma_v = \vec{u}_y \cdot (\overrightarrow{OM}_v \wedge \vec{F}_v) = C_x \rho_a U^2 2aH z_v \Rightarrow z_v = \frac{H}{2}$$

On retrouve le résultat selon lequel pour une force agissant uniformément sur une surface, le point d'application est au « centre », c'est-à-dire à l'isobarycentre de la surface d'action.

- Sans calcul, on peut remarquer que pour $\theta \neq 0$, le bras de levier va être multiplié par $\cos \theta$, mais c'est aussi le cas de la section transverse au vent, $dS = 2adz \cos \theta$. In fine on obtient $\Gamma_v(\theta) = \Gamma_v(0) \cdot (\cos \theta)^2$.
Remarque : On peut retrouver cela en modifiant l'intégrale précédente : l'abscisse du point M doit être modifiée mais cela n'influe pas sur le résultat, et la borne supérieure $z = H$ est modifiée en $z = H \cos \theta$, ce qui ramène à une dépendance en $\cos^2 \theta$.
- On a $\Gamma_r(\theta = \theta_c) = 0$ en $\theta = 10^\circ$ donc $\theta_c = 10^\circ$.
 - On a $\Gamma_r(\theta = 0) = \Gamma_0$ et on lit une discontinuité de $-9 \times 10^3 \text{ N.m}$, donc $\Gamma_0 = -9 \times 10^3 \text{ N.m}$.
 - Le minimum correspond à

$$\frac{d\Gamma_r}{d\theta}(\theta_m) = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{\theta_c} - \frac{10\theta_m}{\theta_c^2} = 0 \Leftrightarrow \theta_m = \frac{2}{5} \theta_c = 4^\circ$$

Le minimum vaut alors $\Gamma_r(\theta_m) = \frac{9}{5} \Gamma_0 = -16 \times 10^3 \text{ N.m}$. Ces deux valeurs sont conformes à celles lues sur le graphe à la précision près disponible.

- L'équilibre correspond, d'après le TMCS, à la compensation des deux moments résultants : $\Gamma_v + \Gamma_r(\theta)$.
 - On raisonne ici au voisinage de $\theta = 0$, où Γ_r varie tellement brutalement qu'on l'a modélisé par une discontinuité. $\Gamma_r(0)$ varie en fait brutalement sur une plage $[\Gamma_0, 0]$. Donc un équilibre est possible uniquement si $p < 1$. Cet équilibre est stable car si Γ_v augmente un peu, $|\Gamma_r|$ augmente aussi, ce qui ramène l'arbre à sa position initiale.
 - Sur la partie continue, donc $\theta > 0$, un équilibre est possible si $\Gamma_v \in [0, |\Gamma_r(\theta_m)|]$ avec $\Gamma_r(\theta_m) = \frac{9}{5} \Gamma_0$, donc si $p \in [0; \frac{9}{5}]$ soit $p \in [0; 1,8]$.
C'est équilibre est toutefois instable sur la partie croissante de $\Gamma_r(\theta)$, c'est-à-dire pour $\theta_e \geq \theta_m$, car si Γ_v croît un peu alors $|\Gamma_r|$ décroît, d'où l'évolution vers le déracinement. Inversement l'équilibre est stable si $\theta_e < \theta_m$.
En réalité il y a deux équilibres possibles pour chaque valeur de Γ_v , donc un phénomène d'hysteresis. Pour accéder aux équilibres instables en $\theta_e \geq \theta_m$ il faut momentanément franchir la valeur $\theta = \theta_m$, ce qui est possible si l'arbre a suffisamment d'élan, ou si la limite $p = 1,8$ est dépassée pendant une courte durée. C'est pourquoi les équilibres stables au voisinage de θ_m ne sont en fait pas très sûrs, car le basculement du côté instable est dynamiquement possible.

11. On applique le théorème de l'énergie cinétique à l'arbre, qui est ici modélisé comme un solide en rotation autour d'un axe fixe avec une liaison pivot idéale c'est-à-dire sans frottement. En effet le moment résultant $\Gamma_r(\theta)$ rend complètement compte de l'interaction avec le sol et du travail des forces intérieures à l'arbre. Par ailleurs le poids est négligé, donc entre $\theta(t=0) = 0$ (énergie cinétique nulle) et l'angle $\theta(t)$ quelconque, la variation d'énergie cinétique est égale à la somme des travaux des actions du vent et de Γ_r . La puissance de ce système de forces sur le solide est calculée au point fixe O , donc elle se réduit aux termes liés à la rotation :

$$\frac{dE_{c\text{arbre}}}{dt} = \mathcal{P}_v + \mathcal{P}_r = \Gamma_v \dot{\theta} + \Gamma_r(\theta) \dot{\theta} = (\Gamma_v + \Gamma_r(\theta)) \dot{\theta}$$

d'où par intégration

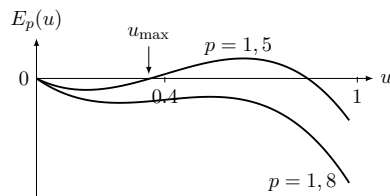
$$\begin{aligned} \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 - 0 &= \int_0^t (\Gamma_v \dot{\theta} + \Gamma_r(\theta) \dot{\theta}) dt = \int_0^\theta (\Gamma_v + \Gamma_r(\theta')) d\theta' \\ &= |\Gamma_0| \int_0^\theta \left(p - 1 - 4\frac{\theta'}{\theta_c} + 5\frac{\theta'^2}{\theta_c^2} \right) d\theta' \\ &= |\Gamma_0| \theta_c \int_0^u (p - 1 - 4u' + 5u'^2) du' \\ &= |\Gamma_0| \theta_c \left((p-1)u - 2u^2 + \frac{5}{3}u^3 \right) \quad \text{d'où} \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 = |\Gamma_0| \theta_c u P(u)} \quad \text{avec} \quad \boxed{P(u) = (p-1) - 2u + \frac{5}{3}u^2} \quad \text{et} \quad \boxed{u = \frac{\theta}{\theta_c}}.$$

12. L'expression ci-dessus est une intégrale première de l'énergie, qui peut permettre de définir une énergie potentielle de telle sorte que l'énergie mécanique est constante et nulle :

$$\frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + E_p(u) = 0 \quad \text{avec} \quad E_p(u) = -|\Gamma_0| \theta_c u P(u).$$

Cette égalité impose $E_p(u) \leq 0$, ou $P(u) \geq 0$, pour qu'il y ait mouvement. On représente ci-contre cette énergie potentielle pour deux valeurs de p ($u_m = 0,4$ correspond à la position $\theta = \theta_m$ du minimum de $\Gamma_r(\theta)$). Le mouvement est donc borné et oscillatoire si $E_p(u)$ devient positif sur un domaine tel que $u \leq 1$, donc si $P(u)$ devient négatif. Dans le cas contraire le mouvement conduit nécessairement au déracinement.



On trouve immédiatement que $P(u)$ est minimal en $u_0 = \frac{3}{5} = 0,6$, avec la valeur $P(u_0) = p - \frac{8}{5} = p - 1,6$. Les racines existent donc si $p - 1,6 \leq 0$ donc le mouvement est borné si $\boxed{p < p_c = 1,6}$, avec une borne en la première racine $u_{\max} < u_0 = 0,6$ (racine à gauche du sommet car c'est la première annulation de $\dot{\theta}$ qui est atteinte). Ainsi, **il y aura nécessairement déracinement si $\boxed{p > p_c = 1,6}$** . Les deux cas représentés ci-dessus sont conformes à ce résultat.

On voit que cette condition est plus contraignante que celle de l'existence des positions d'équilibre ($p < 1,8$). On retrouve en cela la remarque de la question 10. : **si $p \in [1,6; 1,8]$ alors le système admet des positions d'équilibre au voisinage de $\theta_m = 4^\circ$, mais il ne va pas s'y arrêter à cause de son élan, et va les dépasser jusqu'au déracinement.**

La vitesse critique U_c à ne pas dépasser correspond donc à

$$p_c = \frac{\Gamma_{vc}}{|\Gamma_0|} = \frac{C_x \rho_a U_c^2 a H^2}{|\Gamma_0|} \Leftrightarrow \boxed{U_c = \sqrt{\frac{p_c |\Gamma_0|}{C_x \rho_a a H^2}}} = \underline{11 \text{ m.s}^{-1} \approx 39 \text{ km.h}^{-1}},$$

en utilisant la loi des gaz parfaits pour retrouver $\rho_a = \frac{M_{\text{air}} P_{\text{atm}}}{R T_{\text{atm}}} \approx 1,2 \text{ kg.m}^{-3}$ pour $P_{\text{atm}} = 10^5 \text{ Pa}$ et $T = 288 \text{ K}$ (température moyenne à la surface du globe).

13. On raisonne comme précédemment. La valeur maximale de θ est obtenue quand $\dot{\theta} = 0$ donc quand

$$P(u) = (p-1) - 2u + \frac{5}{3}u^2 = 0.$$

Il y a deux racines à cette équation mais c'est la plus petite qui nous intéresse, à savoir

$$u_{\max} = \frac{3}{5} - \frac{3}{5} \sqrt{\frac{8}{3} - \frac{5p}{3}} \Leftrightarrow \boxed{\theta_{\max} = \frac{3\theta_c}{5} \left(1 - \sqrt{\frac{8}{3} - \frac{5p}{3}} \right)} = \underline{2,0^\circ}.$$

En réalité, les oscillations entre $\theta = 0$ et θ_{\max} sont amorties, donc l'arbre se stabilise en sa position d'équilibre θ_∞ , qui est la première racine de l'équation

$$\Gamma_v = -\Gamma_r(\theta) \Leftrightarrow p = 1 + 4u - 5u^2 \dots$$

Le calcul explicite n'est pas demandé.