

MÉCANIQUE

CALCULATRICES AUTORISÉES

I. Modélisation de la chute d'un arbre

Rappel : Loi de Coulomb

Un solide en contact quasi-ponctuel sur un support subit de la part du support des actions de contact équivalentes à une force \vec{F} résultante que l'on peut décomposer en une composante normale \vec{N} et une composante tangentielle \vec{T} . En l'absence de glissement, on a $\|\vec{T}\| < f\|\vec{N}\|$ où f est le coefficient de frottement. En présence de glissement, la composante tangentielle \vec{T} est dirigée dans la direction opposée à celle du vecteur vitesse de glissement et on a $\|\vec{T}\| = f\|\vec{N}\|$.

On note $g = 9,81 \text{ m.s}^{-1}$ l'intensité du champ de pesanteur.

I.1. Initiation d'un apprenti bûcheron

Un bûcheron assimilé à un point matériel B de masse m souhaite abattre un arbre mort assimilé à un cylindre homogène de masse M avec $M > m$, de hauteur H et de section droite carrée de côté $2a$ représenté sur la figure 1.

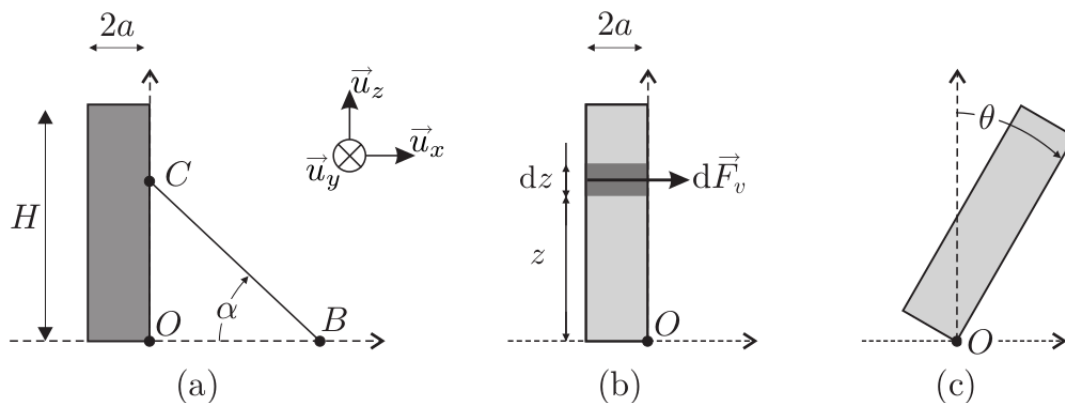


FIGURE 1 – Chute d'un arbre.

Il tire pour cela sur un câble fixé en C à l'arbre, de longueur $BC = \ell$ et de masse négligeable, afin de faire tourner l'arbre autour de l'axe (O, \vec{u}_y) dirigé par le vecteur $\vec{u}_y = \vec{u}_z \wedge \vec{u}_x$.

L'arbre étant mort, on néglige l'action de ses racines, de telle sorte qu'au moment où l'arbre commence à tourner, les actions de contact qu'il subit se limitent à une force $\vec{R}_1 = T_1\vec{u}_x + N_1\vec{u}_z$ appliquée au point O , et satisfaisant aux lois de Coulomb avec un coefficient de frottement f . De même les actions du sol sur le bûcheron sont décrites par une force $\vec{R}_2 = T_2\vec{u}_x + N_2\vec{u}_z$ appliquée au point B et satisfaisant aux lois de Coulomb avec le même coefficient de frottement f . Les composantes T_1 , N_1 , T_2 et N_2 ont des valeurs algébriques. Le câble est supposé tendu. On note \vec{F} la force exercée par le câble sur l'arbre au point C , supposée parallèle au câble, et F sa norme. Les angles sont orientés positivement dans le sens trigonométrique autour de (O, \vec{u}_y) et on note α l'angle (positif donc) entre \vec{BO} et \vec{BC} .

1. Le bûcheron est supposé ne pas glisser dans la situation initiale décrite par la figure 1(a). Exprimer N_2 et T_2 en fonction de F , α , m et g . En déduire l'expression de la valeur maximale F_{\max} de F en fonction de f , m , g et α .

2. L'arbre est supposé au repos dans la situation initiale décrite par la figure 1(a). Exprimer N_1 et T_1 en fonction de F , α , M et g . En déduire que pour $0 \leq F \leq F_{\max}$ le glissement n'est pas possible en O .
3. Exprimer le moment Γ_g du poids de l'arbre par rapport à l'axe (O, \vec{u}_y) dans la situation initiale décrite par la figure 1(a).
4. Soit Γ_B le moment par rapport à l'axe (O, \vec{u}_y) exercé par le bûcheron sur l'arbre via le câble. Exprimer Γ_B en fonction de F , ℓ et α .
En déduire la force F_{\min} alors nécessaire pour mettre l'arbre en rotation.
5. Montrer qu'il existe une valeur optimale α_m de l'angle α .
6. On donne $M = 10^3$ kg, $H = 20$ m, $a = 0,5$ m, $m = 10^2$ kg et $\ell = 25$ m. La figure 2 ci-dessous représente F_{\min} (trait fin continu) et F_{\max} dans le cas $f = 1$ (trait épais continu), ainsi que F_{\max} pour $f = 0,3$ (trait épais discontinu).
En temps normal $f = 1$. Le Bûcheron peut-il mettre l'arbre en rotation sans glisser? Si oui quel angle α devrait-t-il choisir? Sinon quelle solution s'offre à lui?
En temps de pluie on obtient $f = 0,3$. Mêmes questions.

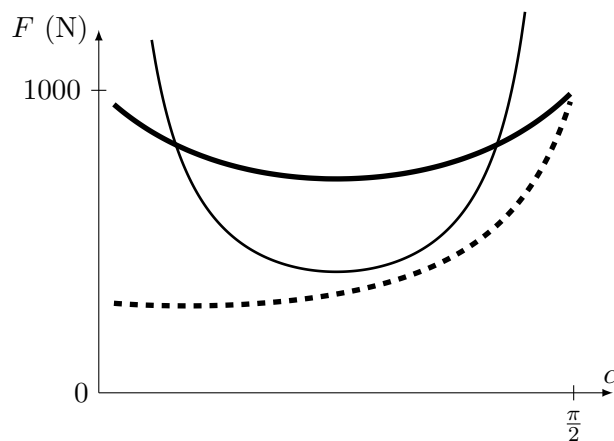


FIGURE 2 – Évolution en fonction de l'angle α de : F_{\min} (trait fin continu), F_{\max} dans le cas $f = 1$ (trait épais continu), ainsi que F_{\max} pour $f = 0,3$ (trait épais discontinu), pour

I.2. Déracinement d'un arbre par une bourrasque

Dans cette partie, on s'intéresse à la chute d'un arbre vivant, de hauteur H , sous l'effet d'un coup de vent violent. On néglige le rôle du poids de l'arbre : son mouvement résulte uniquement d'une compétition entre l'action du sol via les racines et l'action du vent.

Cette dernière est modélisée par une force élémentaire

$$d\vec{F}_v = C_x \rho_a U^2 dS \vec{u}_x$$

appliquée à chaque tranche du tronc d'arbre entre la hauteur z et la hauteur $z + dz$, pour un vent de vitesse $U \vec{u}_x$ ($U > 0$), en notant ρ_a la masse volumique de l'air, et C_x un coefficient d'aérodynamisme. Lorsque l'arbre est vertical, la section élémentaire dS transverse au vent de la tranche élémentaire dz est donc $dS = 2adz$.

7. L'arbre étant vertical, exprimer le moment total Γ_v des actions du vent par rapport à l'axe (O, \vec{u}_y) , en fonction de C_x , ρ_a , a , H et U .
8. Lorsque l'arbre commence à pencher, on repère son mouvement par l'angle θ représenté sur la figure 1(c). Le moment Γ_v varie en fonction de θ et on constate que $\Gamma_v(\theta)$ est proportionnel à $(\cos \theta)^n$ avec n entier. Proposer une valeur de l'entier n en justifiant votre réponse.

Dans toute la suite, on omet la dépendance de Γ_v en θ car celui-ci reste inférieur à 10° .

L'action du sol sur l'arbre est décrite par un moment résistant Γ_r par rapport à l'axe (O, \vec{u}_y) , qui met en jeu des phénomènes complexes comme l'élasticité des racines, un déracinement partiel, l'entraînement de la terre, etc.

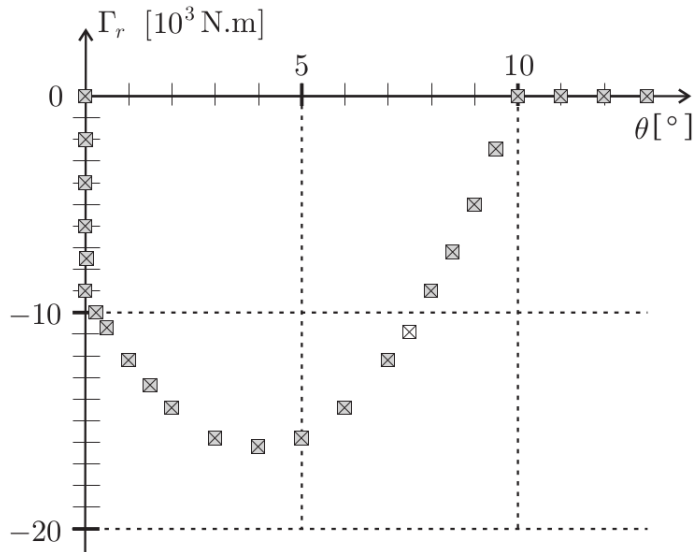


FIGURE 3 – Mesures du moment résistant lié au système racinaire en fonction de l'inclinaison θ du tronc. La taille des carrés représente l'incertitude de mesure.

Des essais de traction via un câble comme dans la partie précédente ont permis de relever les variations de Γ_r (en 10^3 N.m) en fonction de θ (en degrés) dans la figure 3 dans le domaine $\theta > 0$ auquel on se limite. Cette figure fait notamment apparaître une variation brutale au voisinage de $\theta = 0$ que l'on modélise par une discontinuité telle que $\Gamma_r(0) = 0$ et $\Gamma_r(0^+) = \Gamma_0$. Par ailleurs, au-delà d'un certain angle θ_c , l'arbre est totalement déraciné, de telle sorte que $\Gamma_r = 0$. Dans le domaine $0 < \theta \leq \theta_c$, on modélise les mesures expérimentales de Γ_r par un polynôme du deuxième degré de la forme :

$$\Gamma_r = \Gamma_0 \left(1 + 4 \frac{\theta}{\theta_c} - 5 \frac{\theta^2}{\theta_c^2} \right) \quad \text{avec} \quad \Gamma_0 < 0$$

9. Quelles valeurs doit-on donner aux paramètres θ_c et Γ_0 afin que ce polynôme rende compte des mesures de la figure 3 ?

Exprimer l'angle θ_m pour lequel Γ_r atteint sa valeur minimale et la valeur Γ_m de ce minimum. Vérifier la cohérence entre les résultats expérimentaux et les valeurs de $\frac{\theta_m}{\theta_c}$ et $\frac{\Gamma_m}{\Gamma_0}$ issues du modèle.

Du point de vue de sa dynamique, l'arbre est désormais assimilé à une barre mince en rotation autour de l'axe (O, \vec{u}_y) avec un moment d'inertie J , soumis au moment constant Γ_v et au moment $\Gamma_r(\theta)$ décrit par le modèle de l'équation ci-dessus. Initialement l'arbre est au repos en $\theta = 0$ en présence d'un vent de vitesse U indépendante du temps, et on s'interroge sur son évolution. On définit le paramètre $p = \frac{\Gamma_v}{|\Gamma_0|}$.

10. Discuter graphiquement selon la valeur de p la possibilité pour l'arbre de rester en équilibre en $\theta = 0$. Cet équilibre est-il stable ?

Discuter graphiquement selon la valeur de p l'existence et la stabilité de positions d'équilibre en $\theta_e > 0$.

Dans le cas où il existe une position d'équilibre stable inférieure à θ_c , expliquer sans calculs pourquoi on ne peut néanmoins pas être certain que l'arbre résiste au vent.

On se propose de trancher cette question. Les conditions initiales restent $\theta = 0$ et $\dot{\theta} = 0$.

11. Montrer que la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ de l'arbre vérifie une équation du type

$$\frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 = |\Gamma_0| \theta_c u P(u) \quad \text{avec} \quad u = \frac{\theta}{\theta_c}$$

où $P(u)$ est un trinôme du second degré pour la variable réduite u que l'on explicitera en fonction de l'unique paramètre $p = \frac{\Gamma_v}{|\Gamma_0|}$.

12. En déduire une approche graphique pour déterminer la nature bornée ou non du mouvement, et le cas échéant les bornes de ce mouvement.

À quelle condition sur p l'arbre sera-t-il certainement déraciné ? À quelle vitesse critique U_c cela correspond-il ? Pour l'application numérique on rappelle que $H = 20$ m et $a = 0,5$ m et on prendra $C_x = 0,5$.

- 13.** On se place désormais dans le cas $p = \frac{4}{3}$. Déterminer numériquement les bornes du mouvement de l'arbre.
En réalité l'arbre finit par atteindre une position θ_∞ où il reste immobile. Interpréter qualitativement ce résultat.

* * * FIN DE L'ÉPREUVE * * *