ÉLECTROCINÉTIQUE - RSF et FILTRAGE

I. Impédance d'entrée d'un oscilloscope

1. On a immédiatement $\boxed{u_1 = u}$ donc $\boxed{\underline{H}_{DC} = 1}$.

2. **a)** On peut appliquer la loi du pont diviseur de tension à condition d'associer les deux dipôles en parallèle :

$$\underline{H}_{AC} = \frac{\underline{u_2}}{\underline{u}} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{R_0} + j\omega C_0\right) \cdot \frac{1}{j\omega C_D}} = \frac{1}{1 + \frac{C_0}{C_D} + \frac{1}{jR_0C_D\omega}} \quad \text{or} \quad \frac{C_0}{C_D} \ll 1$$

$$\text{d'où} \quad \boxed{\underline{H}_{AC} \approx \frac{1}{1 + \frac{1}{jx}} = \frac{jx}{1 + jx}} \quad \text{en posant} \quad \boxed{x = R_0C_D\omega}.$$

Il s'agit de la fonction de transfert d'un **filtre passe-haut du 1er ordre**.
Remarque : on pourrait aussi traiter un tel circuit avec la loi des nœuds en termes de potentiel, après avoir placé une masse sur la ligne inférieure :

$$jC_D\omega(\underline{u} - \underline{u_2}) - \frac{\underline{u_2}}{R_0} - jC_0\omega\underline{u_2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad jC_D\omega\underline{u} = \underline{u_2}\left(\frac{1}{R_0} + j(C_0 + C_D)\omega\right)$$

$$\Rightarrow \underline{H}_{AC} = \frac{jR_0C_D\omega}{1 + jR_0(C_0 + C_D)\omega} \approx \boxed{\underline{H}_{AC} \simeq \frac{jR_0C_D\omega}{1 + jR_0C_D\omega} = \frac{jx}{1 + jx}}.$$

b) Le gain est donné par le module de $\underline{H}_{AC}$: $\boxed{G_{AC} = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}}} \Longrightarrow \boxed{G_{AC,max} = 1}$.

La fréquence de coupure est donnée par $x_{c,AC}$ telle que $G_{AC} = \frac{G_{AC,max}}{\sqrt{2}}$, ce qui donne $x_{c,AC} = 1 = R_0C_D\omega_c$. Ainsi, $\boxed{f_{c,AC} = \frac{1}{2\pi R_0C_D}}$.

3. **a)** On lit $U_1 = 2{,}0\,\mathrm{V}$ et $U_2 = 1{,}4\,\mathrm{V}$, donc $\boxed{\frac{U_2}{U_1} = 0{,}70 \approx \frac{1}{\sqrt{2}}}$.

La fréquence de l'oscillogramme correspond donc à la coupure : on lit $T \approx 84\,\mathrm{ms}$ donc $\boxed{f_{c,AC} = \frac{1}{T}} = \underline{12\,\mathrm{Hz}}$.
Remarque : cette valeur est très basse mais c'est normal pour la fréquence de coupure en couplage AC dont le but est d'éliminer seulement la composante continue du signal.

b) La voie 2 est en avance par rapport à la voie 1. L'écart entre 2 zéros montants est de $\underline{\Delta t = t_2 - t_1 \approx -10\,\mathrm{ms}}$.
Or, la période T des signaux est $\underline{T \approx 84\,\mathrm{ms}}$, donc $\boxed{\varphi = -2\pi\frac{\Delta t}{T}} = \underline{0{,}77\,\mathrm{rad} = 44\,°}$. On est donc très proche de $\frac{\pi}{4}$.
Or ce déphasage doit vérifier $\varphi = \arg(\underline{H}_{AC}) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{4}$. On en déduit $x \approx 1{,}0$ donc $f \approx f_{c,AC} = \frac{1}{T} \approx \underline{12\,\mathrm{Hz}}$.

c) On calcule $\boxed{C_D = \frac{1}{2\pi R_0 f_c}} = \underline{13\,\mathrm{nF}} \gg C_0$.

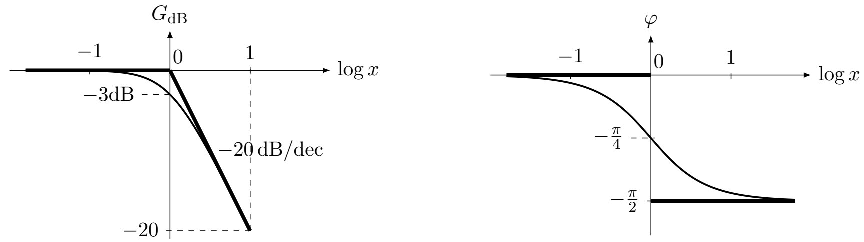
4. D'un **point de vue fréquentiel**, le couplage AC correspond à la réponse d'un filtre passe-haut sur un échelon de tension : elle est discontinue au départ car les hautes fréquences passent, mais elle tend vers 0 ensuite, car la fréquence nulle (valeur moyenne) ne passe pas. Plus précisément, la période du signal créneau est de $T_{cr} = 400\,\mathrm{ms}$. Son fondamental a donc une fréquence $f = \frac{1}{T_{cr}} = 2{,}5\,\mathrm{Hz} \approx f_{c,AC}/5$. Ainsi, les 4 premières harmoniques sont en dehors de la bande passante, donc affectées (voire éliminées) par le couplage *AC*. Plus concrètement, on voit que le mode AC essaie de supprimer la valeur moyenne de chaque arche d'échelon, car celui-ci est de fréquence très faible donc perçu comme constant sur chaque demi-période.
D'un **point de vue temporel**, on peut obtenir l'équation différentielle entre u_2 et $u = u_1$ à partir de la fonction de transfert :

$$\frac{\underline{u_2}}{\underline{u_1}} = \frac{jx}{1 + jx} \quad \Leftrightarrow \quad (1 + R_0C_D\,j\omega)\underline{u_2} = R_0C_D\,j\omega\underline{u_1} \quad \Rightarrow \quad u_2 + R_0C_D\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} = R_0C_D\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t},\ \forall t.$$

On va donc observer la réponse d'un système du premier ordre à des échelons, mais du point de vue du courant (tension sur la résistance) qui est discontinu. Ceci explique la présence d'arches d'exponentielles décroissant vers zéro dans le signal u_2.

5. La loi du pont diviseur de tension donne immédiatement : $\underline{H} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$ d'où $\boxed{\underline{H} = \frac{1}{1 + jx}}$ avec $\boxed{x = RC\omega}$.

6. Il s'agit d'un filtre passe-bas du 1er ordre. Les équivalents de la fonction de transfert donnent :
Basses Fréquences (BF, $\omega \ll \frac{1}{RC}$) : $\underline{H} \sim 1$ donc $\boxed{G_{dB} \simeq 0}$ et $\boxed{\varphi \simeq 0}$.
Hautes Fréquences (HF, $\omega \gg \frac{1}{RC}$) : $\underline{H} \sim \frac{1}{jx}$ donc $\boxed{G_{dB} \sim -20\log x}$ et $\boxed{\varphi \sim -\frac{\pi}{2}}$.
À la fréquence propre $x = 1$ (qui est aussi la fréquence de coupure) : $\underline{H} = \frac{1}{1+j}$ donc $\boxed{G_{\mathrm{dB}}(1) = -3{,}0\,\mathrm{dB}}$ et $\boxed{\varphi(1) = -\frac{\pi}{4}}$.
Le gain maximal est obtenu en BF : $\boxed{G_{dB,max} = 0}$. Ci-dessous l'allure du diagramme asymptotique est en traits épais, et le diagramme réel en traits fins.



7. À la coupure $G = |\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega_c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, soit $RC\omega_c = 1$, d'où $\boxed{f_c = \frac{1}{2\pi RC}}$.
A.N. : (a) et (b) donnent $\boxed{f_c = 5{,}0\,\mathrm{kHz}}$.

8. De nouveau on utilise le pont diviseur de tension : $\underline{H}' = \dfrac{1}{1 + R\left(\frac{1}{R_0} + j\omega(C + C_0)\right)}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\underline{H}' = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c'}}} \quad \text{avec} \quad \boxed{H_0 = \frac{R_0}{R + R_0}} \quad \text{et} \quad \boxed{\omega_c' = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_0}\right)\frac{1}{C + C_0}}.$$

Il s'agit toujours d'un filtre **passe-bas** du premier ordre.

9. Le gain maximal devient, toujours à très basse fréquence, $\boxed{G_{dB,max} = 20\log H_0 = -20\log\left(1 + \frac{R}{R_0}\right)}$.

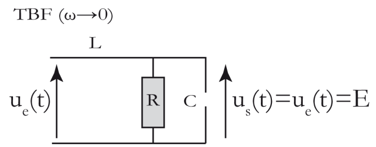
La fréquence de coupure devient $\boxed{f'c = \frac{1}{2\pi(C + C_0)}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_0}\right)}$.

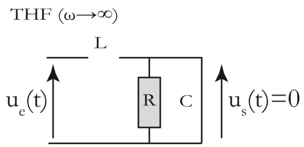
A.N. : (a) $\boxed{G_{dB,max} = -4,1.10^{-2}\,\mathrm{dB} \simeq 0}$ et $\boxed{f_c = 5,0\,\mathrm{kHz}}$
(b) $\boxed{G_{dB,max} = -4,5\,\mathrm{dB} \neq 0}$ et $\boxed{f_c = 3,6\,\mathrm{kHz}}$
Conclusion : les valeurs sont bien affectées par la présence de l'oscilloscope dans le cas (b) où l'impédance de l'oscilloscope n'est pas négligeable, alors qu'elles ne le sont pas dans le cas (a).

II. Obtention d'une tension continue réglable

Analyse fréquentielle du circuit

1. À Très Basse Fréquence (TBF) la bobine est assimilable à un fil et le condensateur à un interrupteur ouvert. À Très Haute Fréquence (THF) c'est l'inverse. Les circuits asymptotiques sont donc respectivement :





2. On utilise la relation du pont diviseur de tension, après avoir associé les dipôles R et C :

$$\frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{\underline{U}_s}{E} = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{R}+j\omega C\right)j\omega L} = \frac{1}{1-\omega^2 LC + j\frac{\omega L}{R}}, \quad \text{d'où}$$

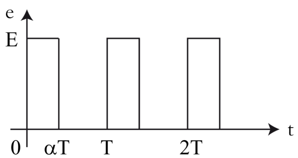
$$\boxed{\underline{U}_s = \frac{E}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}+j\frac{\omega}{\omega_0 Q}}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \quad \text{et} \quad \boxed{Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}}.$$

3. On en déduit $\boxed{U_s = |\underline{U}_s| = \dfrac{E}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2+\left(\frac{\omega}{\omega_0 Q}\right)^2}}}$.

4. La phase à l'origine de $u_s(t)$ est aussi le déphasage entre $u_s(t)$ et $u_e(t)$:

$$\begin{aligned}\varphi &= \arg\left(\frac{\underline{U}_s}{E}\right) = -\arg\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}+j\frac{\omega}{\omega_0 Q}\right) = -\arg\left(j\frac{\omega}{\omega_0 Q}\left(jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)+1\right)\right)\\ &= -\arg\left(j\frac{\omega}{\omega_0 Q}\right) - \arg\left(1+jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)\right) \quad \text{d'où} \quad \boxed{\varphi = -\frac{\pi}{2} - \arctan\left(Q\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)} \text{(et } \varphi(0)=0).\end{aligned}$$

Fabrication de la tension continue



5.

6. Par définition de la valeur moyenne :

$$< e(t) > = \frac{1}{T}\int_0^T e(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^{\alpha T} E\mathrm{d}t \quad \text{d'où} \quad \boxed{< e(t) > = \alpha E}.$$

7. En réutilisant les résultats des questions **3.** et **4.**, on a $\boxed{s_n(t) = S_n \cos(n\omega t + \psi_n + \varphi_n)}$ avec

$$\boxed{S_n = \frac{A_n}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{n\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2+\left(\frac{n\omega}{\omega_0 Q}\right)^2}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\varphi_n = -\frac{\pi}{2} - \arctan\left(Q\left(\frac{n\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{n\omega}\right)\right)}.$$

8. On utilise le théorème de superposition pour ce circuit linéaire. De plus, a_0 étant la valeur moyenne du signal d'entrée, il vaut αE. La réponse s_0 aux bornes de $R//C$ associée à cette composante « continue » est aussi αE : en effet pour $\omega = 0$, d'après **3.** et **4.**, l'amplitude est inchangée et il n'y a pas de déphasage. Ainsi :

$$\boxed{s(t) = \alpha E + \sum_{n=1}^{\infty} S_n \cos(n\omega t + \psi_n + \varphi_n)}.$$

9. La pulsation de coupure est de l'ordre de grandeur de ω_0 (dépend de Q pour un filtre d'ordre 2). Donc en première approximation on peut considérer que les harmoniques de pulsation $n\omega = 10n\omega_0$ seront éliminées par le filtre. Il ne restera donc que la composante de pulsation nulle s_0, donc le signal de sortie est approximativement constant : $\boxed{s(t) \approx \alpha E}$.
Remarque : on a donc réalisé une tension constante de niveau ajustable en faisant varier la constante α appelée « rapport cyclique ».

10. On calcule l'amplitude du premier harmonique négligé (qui sera le premier, soit $n = 1$, car les amplitudes sont décroissantes avec n et le gain du filtre est décroissant avec ω puisque c'est un passe-bas).

$$S_1 = \frac{A_1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2+\left(\frac{\omega}{\omega_0 Q}\right)^2}} = \frac{A_1}{\sqrt{(1-100)^2+2\times 100}} \approx \frac{A_1}{100} \quad \text{avec} \quad A_1 = \frac{4E}{\pi}.$$

On en déduit le taux d'ondulation $\boxed{\dfrac{S_1}{s_0} = \dfrac{4}{100\,\alpha\,\pi}} \approx \underline{2,5\,\%}$. La tension est donc constante modulo des oscillations de l'ordre de 2,5% de sa valeur.