

ÉLECTROCINÉTIQUE

I. Régime transitoire dans un circuit RLC parallèle

1. Par continuité du courant dans la bobine et de la tension aux bornes du condensateur, on a $i_1(0^+) = i_1(0^-) = 0$ et $u(0^+) = u(0^-) = 0$. De plus $i_3(0^+) = u(0^+)/R$, d'où $i_3(0^+) = 0$ et $i_2(0^+) = i(0^+)$. La loi des mailles donne alors $E = ri(0^+) + 0$, d'où $i_2(0^+) = E/r$.

Le régime permanent sera stationnaire, donc lorsqu'il est atteint la bobine se comporte comme un fil et le condensateur comme un interrupteur ouvert. On en déduit $u = 0$, $i_3 = u/R = 0$, $i_2 = 0$ et $i_1 = i = E/r$ par la loi des mailles.

2. La loi des mailles et la loi des noeuds mènent à $E = r(i_1 + i_2 + i_3) + u$. Or on a $u = Ri_3 = L \frac{di_3}{dt}$, et $i_2 = C \frac{du}{dt}$. En dérivant par rapport au temps la première équation on obtient donc

$$0 = \frac{rR}{L}i_3 + rCR \frac{d^2i_3}{dt^2} + (r + R) \frac{di_3}{dt},$$

ce qui mène à la forme canonique

$$\frac{d^2i_3}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{di_3}{dt} + \omega_0^2 i_3 = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{rR}{r + R} \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

3. Le régime pseudo-périodique correspond à une combinaison linéaire de solutions du type $e^{r_{1,2}t}$ avec $r_{1,2}$ complexes conjuguées, ce qui est le cas si le discriminant de l'équation caractéristique est négatif :

$$\omega_0^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 4 \right) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad Q > \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2rR}{r + R} > \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \Leftrightarrow \quad 2\sqrt{\frac{C}{L}} > \frac{1}{r} + \frac{1}{R}.$$

4. On obtient $Q = 5,9$, donc on aura un régime pseudopériodique. D'autre part $\omega_0 = 7,1.10^3 \text{ rad.s}^{-1}$, et donc $T_0 = 2\pi/\omega_0 = 8,9.10^{-4} \text{ s}$.

5. La pseudo-pulsation est la partie imaginaire des racines de l'équation caractéristique :

$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - 1/(4Q^2)} = 7,0.10^3 \text{ rad.s}^{-1}$. Comme Q est relativement grand, ω est très proche de ω_0 , la différence étant à la limite de la précision disponible. De même $T = 2\pi/\omega = 8,9.10^{-4} \text{ s}$ ne se distingue pas de T_0 .

6. Posons τ le temps caractéristique vérifiant $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$. La solution générale s'écrit alors

$$i_3(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)).$$

On détermine les deux constantes d'intégration A et B par les conditions initiales : $i_3(0^+) = 0 = A$, et

$$\frac{di_3}{dt}(0^+) = \frac{1}{R} \frac{du}{dt}(0^+) = \frac{1}{RC} i_2(0^+) = \frac{E}{rRC} = -\lambda A + B\omega = B\omega. \quad \text{On en tire} \quad i_3(t) = \frac{E}{rRC\omega} e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\omega t).$$

7. Les maxima (ou les minima) de i_3 sont T -périodiques. On définit le décroissement logarithmique par $\delta = \ln \frac{i_{3 \max}(t_m)}{i_{3 \max}(t_m + T)}$, en notant t_m un maximum local de i_3 . Or, en notant $I_m = \frac{E}{rRC\omega}$, on a

$$i_{3 \max}(t_m + T) = I_m e^{-\frac{t_m + T}{\tau}} \sin(\omega(t_m + T)) = I_m e^{-\frac{t_m + T}{\tau}} \sin(\omega t_m) = i_{3 \max}(t_m) e^{-\frac{T}{\tau}} \quad \text{car} \quad \omega T = 2\pi.$$

On en déduit $\delta = \frac{T}{\tau} = \frac{\omega_0 T}{2Q} \approx \frac{\pi}{Q} = 0,5$.

8. Le critère impose un temps d'établissement du régime permanent t_{1000} qui s'exprime sur l'enveloppe par

$$I_m e^{-\frac{t_{1000}}{\tau}} = I_m 0,001 \quad \Leftrightarrow \quad t_{1000} = \tau \ln 1000 = \frac{2Q}{\omega_0} \ln 1000 = 12 \text{ ms}.$$

II. Étude expérimentale d'une bobine réelle

Première partie.

1. On mesure, entre $t = 0$ et $t = 4,0$ ms, une période $T = 4,0$ ms, d'où $f = \frac{1}{T} = 0,25 \times \text{kHz}$.

On lit directement les amplitudes $U_e = 5,0\text{V}$ et $U_R = 2,5\text{V}$.

D'après la loi d'Ohm $u_R = Ri$ on déduit que $I = \frac{U_R}{R} = 63\text{mA}$.

2. En notation complexe, la loi d'Ohm s'écrit

$$\underline{u}_e = \underline{Z}_{AM} \cdot \underline{i} \Rightarrow |\underline{u}_e| = |\underline{Z}_{AM}| \cdot |\underline{i}| \Leftrightarrow U_e = |\underline{Z}_{AM}| \cdot I \Leftrightarrow |\underline{Z}_{AM}| = \frac{U_e}{I} = 80\Omega.$$

3. • — La tension $u_e(t)$ est en avance de phase sur $u_R(t)$, car elle passe avant par son maximum.
 — Le calcul du déphasage peut se faire en mesurant le décalage temporel entre deux passages à zéro d'un même front pour u_e et u_R : $t_e - t_R = -0,33$ ms. Alors :

$$\varphi_{u_e/u_R} = -2\pi f(t_e - t_R) = +0,52\text{rad} > 0$$

— On pouvait aussi s'inspirer de la méthode des 9 carreaux. Une demi-période (correspondant à un déphasage de π) occupe ici 6 carreaux et il y a 1 carreau de déphasage entre les deux signaux. Ainsi, $\varphi_{u_e/u_R} = \frac{1}{6}\pi \text{ rad} = \frac{\pi}{6} \text{ rad} = 30 \text{ deg}$.

• On a, par définition de l'impédance, $\varphi = \arg(\underline{Z}_{AM}) = \arg(\underline{u}_e) - \arg(\underline{i})$. Ainsi, on réécrit $\varphi = \arg(\underline{u}_e) - \arg(R\underline{i}) = \arg(\underline{u}_e) - \arg(\underline{u}_R)$. D'où $\varphi = \varphi_{u_e/u_R}$.

4. $\underline{Z}_{AM} = r + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} + R$, donc $\underline{Z}_{AM} = R + r + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$. La partie réelle donne la résistance totale de la branche :

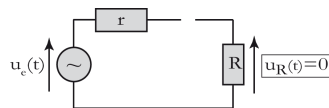
$$|\underline{Z}_{AM}| \cdot \cos \varphi = R + r \Leftrightarrow r = |\underline{Z}_{AM}| \cdot \cos \varphi - R = 29\Omega.$$

5. La partie imaginaire ou réactance vérifie :

$$|\underline{Z}_{AM}| \cdot \sin \varphi = L\omega - \frac{1}{C\omega} \Rightarrow L = \frac{|\underline{Z}_{AM}| \sin \varphi}{\omega} + \frac{1}{C\omega^2} \text{ avec } \omega = 2\pi f \text{ d'où } L = 66\text{mH}.$$

Deuxième partie.

6. À très basse fréquence, l'inductance L est équivalente à un fil, et le condensateur à un interrupteur ouvert. À très haute fréquence, c'est l'inverse. Dans les deux cas on obtient donc le même schéma équivalent suivant :



7. La loi du pont diviseur de tension conduit à : $U_R = \frac{RU_e}{R + r + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}$.

8. La forme canonique proposée comporte un dénominateur adimensionné de coefficient constant égal à 1. On ré-écrit donc le résultat précédent et on identifie :

$$\underline{U}_R = \frac{\frac{R}{R+r} U_e}{1 + \frac{j}{R+r} \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)} \Rightarrow U_{R,max} = \frac{R}{R+r} U_e.$$

De plus on identifie Q grâce au produit des deux termes variables

$$Q \frac{\omega}{\omega_0} \times Q \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{L\omega}{R+r} \times \frac{1}{(R+r)C\omega} \Leftrightarrow Q^2 = \frac{L}{(R+r)^2 C} \Rightarrow Q = \frac{1}{R+r} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

On peut donc ré-écrire

$$\underline{U}_R = \frac{U_{R,max}}{1 + jQ\left(\sqrt{LC}\omega - \frac{1}{\sqrt{LC}\omega}\right)} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

9. La résonance est un maximum d'amplitude U_R de $u_R(t)$. Or : $U_R = |\underline{U}_R| = \frac{U_{R,max}}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$.

Donc U_R est maximale si $1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2$ est minimal, i.e. en $\omega_r = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

10. La fréquence de résonance conduit à $L = \frac{1}{4\pi^2 f_r^2 C} = 66\text{mH}$, et l'amplitude permet d'écrire

$$\frac{U_{R,max}}{U_e} = \frac{R}{R+r} \Leftrightarrow r = R \left(\frac{U_e}{U_{R,max}} - 1 \right) = 29\Omega.$$

Les résultats sont conformes aux précédents.