

MÉCANIQUE - OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE - ÉLECTRICITÉ

I. Mouvement d'un palet dans un tambour

1. Le palet subit :

- la réaction du tambour $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$, avec $\vec{N} = -N\vec{e}_r$ ($N \geq 0$ nécessairement) et $\vec{T} = T\vec{e}_\theta$ avec $T > 0$ ici ^a;
- son poids $m\vec{g} = mg\vec{e}_x$.

Le mouvement du centre d'inertie du palet est circulaire de rayon R , donc l'accélération de M dans le référentiel \mathcal{R} du laboratoire s'écrit : $\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r + R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$.

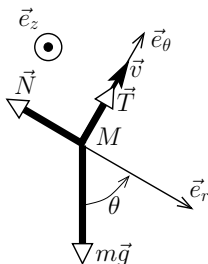
Le Théorème de la Résultante Cinétique dans \mathcal{R} galiléen s'écrit

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T}.$$

a. Le signe de T est opposé au signe de la vitesse de glissement s'il y a glissement, sinon il est dans le sens de l'entraînement par le support.

Par projection selon \vec{e}_r , d'une part et \vec{e}_θ d'autre part, on obtient respectivement

$$\begin{cases} -mR\dot{\theta}^2 = mg \cos \theta - N & (1) \\ mR\ddot{\theta} = -mg \sin \theta + T & (2) \end{cases}$$



2. Le mouvement est sans glissement donc $\dot{\theta} = \Omega = \text{constante}$, il est uniforme. L'Eq. (1) conduit à $N = mg \cos \theta + mR\Omega^2$ qui doit rester positif pour tout θ . Comme c'est une fonction décroissante de θ , une condition nécessaire et suffisante est que

$$N(\theta = \pi) \geq 0 \Leftrightarrow -mg + mR\Omega^2 \geq 0 \Leftrightarrow \Omega \geq \sqrt{\frac{g}{R}} = 5,3 \text{ rad.s}^{-1}.$$

Cette condition est bien vérifiée car $\Omega = 7,3 \text{ rad.s}^{-1}$.

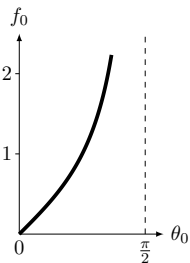
Attention : on n'a pas démontré que le palet allait nécessairement faire une révolution entière, car cela est soumis à l'hypothèse d'une absence de glissement.

3.

On se place dans la situation d'une absence de mouvement : $\theta = \theta_0 = \text{constante}$. Donc $\dot{\theta} = 0$ et $\ddot{\theta} = 0$. Les Eqs. (1)-(2) conduisent alors à $N = mg \cos \theta_0$ et $T = mg \sin \theta_0$. La loi de Coulomb du frottement solide en cas de glissement impose que $|T| = f_0 N$, d'où $f_0 = \tan \theta_0$, cf le graphe ci-contre.

Pour $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, f_0 tend vers l'infini ce qui n'est pas possible, et vient du fait que $N(\theta_0 = \frac{\pi}{2}) = 0$.

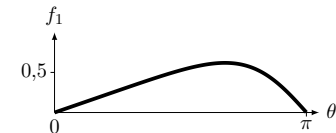
Pour $\theta_0 > \frac{\pi}{2}$, on obtient $N < 0$, ce qui prouve que le palet ne peut être immobile et en situation de contact pour $\theta_0 \geq \frac{\pi}{2}$.



4. On s'intéresse maintenant au mouvement circulaire uniforme de vitesse angulaire $\dot{\theta} = \Omega$ au moment où le glissement commence à avoir lieu, juste avant que le palet se mette à ralentir : $\ddot{\theta} = 0$ et $T = f_1 N$.

D'après les Eqs. (1)-(2) ceci conduit à

$$\left. \begin{aligned} T &= mg \sin \theta_1 \\ &= f_1 N = f_1 (mg \cos \theta_1 + mR\Omega^2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow f_1 = \frac{\sin \theta_1}{\cos \theta_1 + \frac{R\Omega^2}{g}}$$



On sait que cet état peut intervenir pour tout $\theta_1 \in [0; \pi[$ d'après la condition de non décollement trouvée en 2.. cf figure ci-contre.

5. Pour qu'il y ait un tour sans glissement, il faut cette fois que $T < fN$ pour tout θ donc

$$\forall \theta, \left\{ \begin{aligned} T &= mg \sin \theta \\ &< fN = f (mg \cos \theta + mR\Omega^2) \end{aligned} \right. \Leftrightarrow \forall \theta, f > \frac{\sin \theta}{\cos \theta + \frac{R\Omega^2}{g}} = f_1(\theta) \Leftrightarrow f \geq f_{1 \text{ max}}.$$

Ainsi, la valeur minimale f_{min} de f doit être égale à $f_{1 \text{ max}}$. On trouve ce maximum en dérivant la fonction :

$$f'_1(\theta) = \frac{\cos^2 \theta + \frac{R\Omega^2}{g} \cos \theta + \sin^2 \theta}{(\cos \theta + \frac{R\Omega^2}{g})^2} = \frac{1 + \frac{R\Omega^2}{g} \cos \theta}{(\cos \theta + \frac{R\Omega^2}{g})^2} \geq 0 \Leftrightarrow \cos \theta \geq \cos \theta_m = -\frac{g}{R\Omega^2}$$

On obtient le maximum

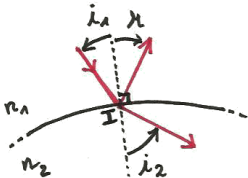
$$f_{1 \text{ max}} = f_1(\theta_m) = \frac{\sqrt{1 - \frac{g^2}{R^2\Omega^4}}}{-\frac{g}{R\Omega^2} + \frac{R\Omega^2}{g}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{R^2\Omega^4}{g^2} - 1}} \text{ d'où } f_{\text{min}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{R^2\Omega^4}{g^2} - 1}} = 0,61.$$

II. Étude simplifiée de l'œil humain (d'après CCP MP 2013)

II.1. Modèle simplifié de l'œil pour la vision de loin

- Les conditions de Gauss sont des conditions d'utilisation d'un **système optique centré** dans lesquelles les rayons utiles sont dits « paraxiaux », c'est-à-dire **peu inclinés** par rapport à l'axe optique et de **point d'incidence sur le système proche de l'axe optique**.
 - Plus l'éclairement est faible plus la **pupille s'élargit**, et plus on **s'écarte des conditions de Gauss**. Les aberrations géométriques s'accroissent et **l'œil n'est alors plus stigmatique**. Ceci est plus handicapant et donc plus perceptible pour la vision de loin, car les objets à discerner ont des tailles angulaires plus faibles. Plisser les yeux peut alors aider à rétablir partiellement les conditions de Gauss en diaphragmant à l'aide des paupières.

2.

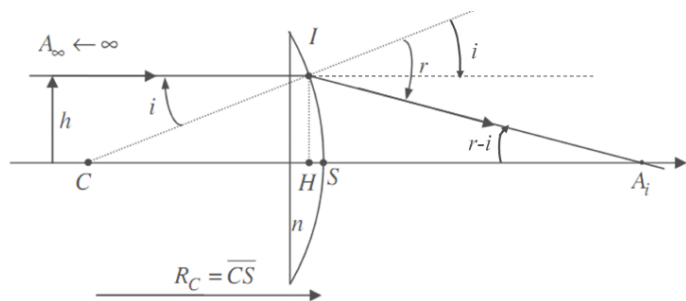


Lois de Snell-Descartes, pour un rayon incident en I sur un dioptre n_1/n_2 :

- Les rayons *réfléchi* et *réfracté* sont dans le *plan d'incidence*, formé par le rayon *incident* et la normale au point d'incidence;
- l'angle du rayon réfléchi vérifie : $r = -i_1$;
- l'angle du rayon réfracté vérifie : $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$.

Avec les notations du problème posé, on donc ici : $n \sin i = \sin r$.

- Le rayon incident issu de A_∞ est parallèle à l'axe, donc $(\widehat{CH; CI}) = -i$, et en le prolongeant on trouve que $(\widehat{A_i H; A_i I}) = r - i$.



On en déduit

$$\overline{CA_i} = \overline{CH} + \overline{HA_i} = R_C \cos i - \frac{\overline{HI}}{\tan(r-i)} \quad \text{d'où} \quad \overline{CA_i} = R_C \left(\cos i + \frac{\sin i}{\tan(r-i)} \right) \quad (1)$$

- En appliquant les approximations proposées, on obtient

$$\overline{CA_i} \approx R_C \left(1 + \frac{i}{r-i} \right) \quad \text{or} \quad ni \approx r \quad \text{donc} \quad \overline{CA_i} \approx \frac{nR_C}{n-1} \quad (2)$$

Ce résultat est **indépendant de i** donc de h .

- D'après le résultat précédent Eq. (2) on a

$$\overline{CF'} = \frac{nR_C}{n-1} \quad \text{et} \quad \overline{CF'} = \overline{CS} + \overline{SF'} = R_C + f' \quad \text{donc} \quad f' = \frac{R_C}{n-1}$$

On retrouve qu'une lentille (plan-convexe) sera **d'autant plus puissante** (forte vergence ou courte distance focale) **si elle est très convexe et/ou si son verre est très réfringent (indice n grand**.

- On obtient

$$f' = \frac{1}{V} \approx \underline{1,7 \text{ cm}} \quad \text{et} \quad R_C = \frac{n-1}{V} \approx \underline{5,5 \text{ mm}}$$

Ces ordres de grandeur semblent corrects.

- D'après la question précédente, $\overline{CA_i}(h \rightarrow 0) = \frac{nR_C}{n-1}$.
Pour h quelconque, on a

$$\sin i = -\frac{h}{R_C} \quad \text{et} \quad \sin r = n \sin i = -\frac{nh}{R_C},$$

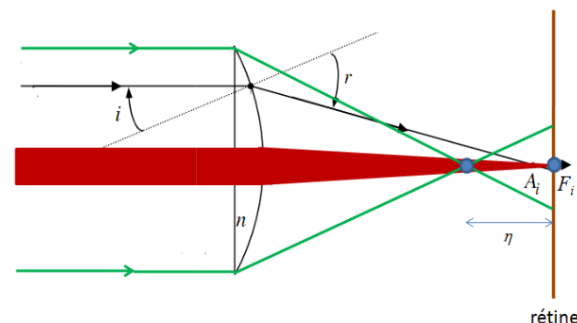
donc d'après l'Eq. (1) :

$$\eta = \frac{nR_C}{n-1} - \overline{CA_i}(h) = R_C \left(\frac{n}{n-1} - \sqrt{1 - \frac{h^2}{R_C^2}} - \frac{h}{R_C \tan(\arcsin(\frac{nh}{R_C}) - \arcsin(\frac{h}{R_C}))} \right)$$

- On applique $h \approx \frac{R_C}{2}$ dans la relation précédente :

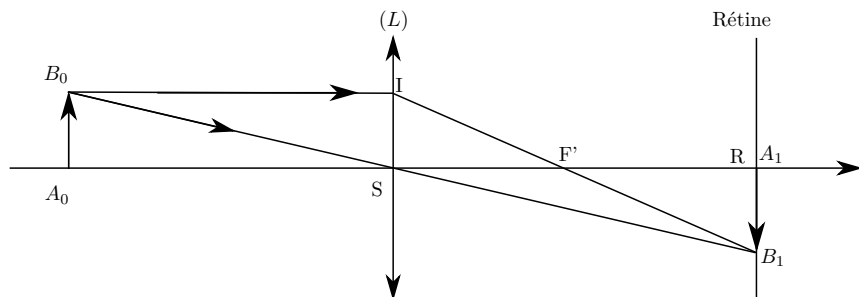
$$\eta \approx R_C \left(\frac{n}{n-1} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2 \tan(\arcsin(\frac{n}{2}) - \frac{\pi}{6})} \right) \approx \underline{4,1 \text{ mm}}$$

Les rayons marginaux convergent à 4,1 mm de la rétine, c'est-à-dire un quart de la distance focale (distance cornée-rétine), ce qui est considérable. En effet l'étalement du faisceau sur la rétine qui en découle donne une tache de diamètre $d \sim \eta \frac{2h}{r} \approx \eta a(n-1) \approx 1,4 \text{ mm}$ (par le théorème de Thalès, cf schéma ci-dessous) ce qui est bien sûr très grand devant la taille des photorécepteurs (environ 5 millions de cônes et 100 millions de bâtonnets par rétine). **La personne voit flou les objets éloignés.**



II.2. Modèle simplifié de l'œil pour la vision de près

- La lentille étant **stigmatique** dans les conditions de Gauss, **il suffit de deux rayons** pour trouver chaque image. L'image B_1 de B_0 est obtenue par intersection de deux rayons remarquables issus de B_0 , l'un passant par S qui n'est pas dévié, l'autre incident parallèle à l'axe qui émerge en passant par F' . L'image de A_0 est obtenue sur l'axe optique par aplanétisme.



b) Le théorème de Thalès algébrisé nous permet d'écrire :

- dans les triangles (SA_0B_0) et (SA_1B_1) : $\frac{A_0B_0}{SA_0} = \frac{A_1B_1}{SA_1}$;
- dans les triangles $(F'SI)$ et $(F'A_1B_1)$: $\frac{SI}{F'S} = \frac{A_0B_0}{F'S} = \frac{A_1B_1}{F'A_1}$;

En faisant le rapport de ces deux équations on élimine les points B_0 et B_1 :

$$\frac{F'S}{SA_0} = \frac{F'A_1}{SA_1} \Leftrightarrow \frac{F'S}{SA_0} = \frac{F'S + SA_1}{SA_1} = \frac{F'S}{SA_1} + 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{SA_0} + \frac{1}{SA_1} = \frac{1}{SF'} = \frac{1}{f'} = V.$$

c) On applique la relation précédente, avec $SA_0 = -d_{\min}$ et $SA_1 = SR$ d'où $V_{\max} = \frac{1}{d_{\min}} + \frac{1}{SR} = 64\delta$.

d) L'objet est maintenant à l'infini : $SA_0 \rightarrow -\infty$ donc $V_{\min} = \frac{1}{SR} = 60\delta$.

e) On obtient une amplitude d'accommodation $A = \frac{1}{d_{\min}} = 4,0\delta$.

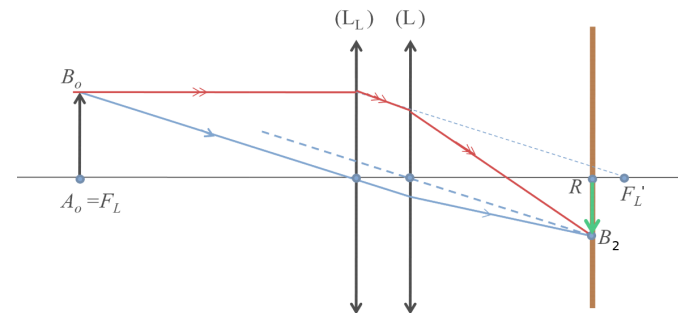
7. a) On obtient maintenant une amplitude d'accommodation $A = \frac{1}{d_{\min}} = 2,9\delta$.

b) Sur la figure ci-dessus, l'angle minimal discernable $(\widehat{SA_0; SB_0}) = \varepsilon$ correspond à la taille minimale des caractères $A_0B_0 = \ell_{\min}$. D'où $\varepsilon \approx \tan \varepsilon = \frac{\ell_{\min}}{d_{\min}}$ et donc $\ell_{\min} = d_{\min} \varepsilon = 0,14 \text{ mm}$.

c) En prenant maintenant $SA_0 = -d'_{\min} = -1,0 \text{ m}$, on obtient $\ell'_{\min} = d'_{\min} \varepsilon = 0,40 \text{ mm}$. Cette distance est de l'ordre de l'espace entre les caractères d'un texte de journal. L'individu presbyte ne peut plus distinguer les caractères et ne peut plus lire son journal sans porter de lunettes correctrices.

8. a) Le point A_0 est conjugué par les lentilles (L_L) et (L) de la façon suivante : $A_0 \xrightarrow{(L_L)} A_1 \xrightarrow{(L)} A_2 = R$. Par ailleurs, lorsque $SA_0 = -25 \text{ cm}$, l'œil n'accommode pas donc A_1 est à l'infini. Cela implique que A_0 est situé au foyer principal objet de (L_L) , et donc $V_L = -\frac{1}{SLA_0} = -\frac{1}{SL\infty + SA_0} = -\frac{1}{0,02 - 0,25} = 4,3\delta$.

b) On utilise deux rayons remarquables pour (L_L) , l'un passant par le centre S_L non dévié et le second incident parallèle à l'axe qui émerge en passant par le foyer image F'_L . Ces deux rayons émergent de (L_L) parallèles entre eux car l'objet est dans le plan focal objet. On cherche l'image B_2 sur le plan focal image de (L) qui est sur la rétine car l'œil n'accommode pas. Ce point est trouvé grâce au rayon fictif incident sur (L) en S et parallèle aux deux autres, qui n'est pas dévié.



c) En accommodant, l'œil peut voir une image $A_{1\min}$ située au minimum à la distance $SA_{1\min} = -d_{\min} = -35 \text{ cm}$. La conjugaison par (L_L) conduit à

$$V_L = \frac{1}{SLA_{1\min}} - \frac{1}{SLA_{0\min}} = \frac{1}{SL\infty - d_{\min}} - \frac{1}{SL\infty + SA_{0\min}}$$

$$\Leftrightarrow SA_{0\min} = \left(\frac{1}{SL\infty - d_{\min}} - V_L \right)^{-1} - SL\infty = -16 \text{ cm}.$$

Comme ses verres sont convergents, la personne peut voir finalement **plus près qu'un œil emmétrope**.

d) Si un objet est situé plus loin que $f'_L = \frac{1}{V_L} = 0,23 \text{ m}$, alors son image par le verre sera réelle et située en arrière de l'œil, donc non visible. **Pour voir de loin, la personne doit retirer ses lunettes, ou porter des verres à foyers multiples, ou des verres progressifs.**