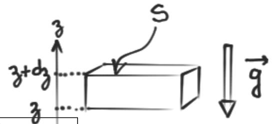
# THERMODYNAMIQUE

## I. Étude de la fontaine de Héron *(d'après IPHO 2017)*

### I.1. Loi de l'hydrostatique et principe du siphon

**1.** On applique le Théorème de la Résultante Cinétique (TRC), dans un référentiel galiléen, à une tranche de fluide infinitésimale d'épaisseur d$z$ et de surface horizontale carrée d'aire $S$. À l'équilibre, son poids est équilibré par la résultante des forces de pression (les forces latérales horizontales se compensent car la pression ne dépend pas de $z$) :




$$\vec{0} = -\rho S \mathrm{d}z g \vec{u}_z + (P(z)S - P(z+\mathrm{d}z)S)\,\vec{u}_z \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\mathrm{d}P = -\rho g \mathrm{d}z} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\rho g}.$$

**2.** Pour un fluide **homogène incompressible**, la masse volumique est indépendante de la position de l'espace. On intègre la relation de la statique ci-dessus entre $z_1$ et $z_2$ ce qui donne

$$\boxed{P(z_2) - P(z_1) = -\rho g(z_2 - z_1)}.$$

**3.** La continuité de la pression à l'interface entre l'eau et l'air implique $P(z_C) = P_0$, d'où $P_(z) = P_0 - \rho g(z - z_C)$ en tout point de cote $z$ au sein du liquide. On en déduit $\boxed{P(z_A) = P_0 - \rho g(z_A - z_C)}$.

**4.** Comme $v_A = v_B$ alors la loi de Bernoulli donne $\frac{P'_A}{\rho} + g z_A = \frac{P_B}{\rho} + g z_B$. Par ailleurs en $B$ l'eau est libre et au contact de l'air donc $P_B = P_0$. D'où $\boxed{P'_A = P_0 + \rho g(z_B - z_A)}$.

**5.** Pendant un intervalle de temps d$t$, la surface du liquide s'abaisse d'une hauteur $v_C$d$t$. Ainsi un volume $S v_C$d$t$ s'introduit dans le tuyau. Par conservation de la masse, et donc du volume car le fluide est incompressible, un même volume $s v_B$d$t$ sort du tuyau en $B$. Comme $v_B = v_A$ on a donc $\boxed{s v_A = S v_C}$. On en déduit en particulier que $\boxed{v_A = \frac{S}{s} v_C > v_C}$.

**6.** On applique la relation de Bernoulli cette fois entre $A$ et $C$ (où $P_C = P_0$), en injectant le résultat précédent :

$$P_0 + \rho g(z_B - z_A) + \frac{1}{2}v_A^2 + \rho g z_A = P_0 + \frac{1}{2}v_C^2 + \rho g z_C \quad \Leftrightarrow \quad v_A^2 - v_C^2 = 2\rho g(z_C - z_B) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{z_C > z_B}.$$

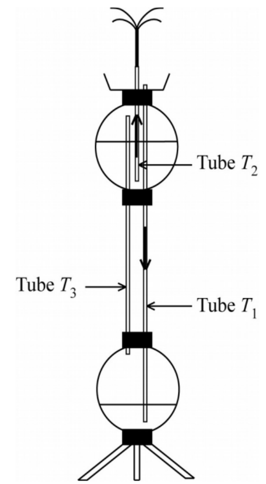
Le siphon fonctionne si il y a un écoulement, donc si $z_C > z_B$. Dans le cas contraire cette équation ne serait pas valable.





### I.2. Fontaine de Héron

**7.** Grâce aux tubes $T_2$ puis $T_1$ le récipient supérieur se trouve relié au récipient inférieur et peut se vider dedans (cf figure ci-contre), car les deux récipients ont une surface libre à la pression atmosphérique à des niveaux différents. Il s'agit donc d'un siphon.




**8.** Le volume d'eau total se conserve au cours de l'écoulement, donc comme les sections horizontales $S$ des récipients sont identiques, on a

$$z(t) + Z(t) = \text{ constante.}$$

Au démarrage les tuyaux $T_1$ et $T_2$ sont remplis et $z(t) + Z(t) \approx H + 0$. Donc finalement $\boxed{\forall t,\ z(t) + Z(t) = H}$.

**9.** En notant $E$ l'entrée du tube $T_1$ (située au fond de la coupelle), et en négligeant la vitesse du liquide au niveau des surfaces libres des volumes d'eau comme le suggère l'énoncé, on peut relier les différents points en utilisant la relation de Bernoulli, en partant de la surface d'eau dans la coupelle :

$$P_0 + \rho g z_E = P_E + \frac{1}{2}\rho v_E^2 + \rho g z_E = P_{B'} + \frac{1}{2}\rho v_{B'}^2 + \rho g z_{B'} = P_{A'} + \rho g z_{A'}$$

Or $z_E = z_{A'} + h_1 - Z$ donc $\boxed{P_{A'} = P_0 + \rho g(h_1 - Z)}$.

**10. Vitesse du jet**

**a)** Comme précédemment, on a par conservation de la masse, et donc du débit volumique $\boxed{v_C = \frac{S}{s} v_A \gg v_A}$.

**b)** La relation de Bernoulli s'écrit

$$\frac{P_A}{\rho} + \frac{1}{2}v_A^2 + g z_A = \frac{P_C}{\rho} + \frac{1}{2}v_C^2 + g z_C\,.$$

Or le tube $T_3$ assure l'égalité des pressions dans l'air des deux récipients, donc $P_A = P'_A = P_0 + \rho g(h_1 - Z)$. Comme $v_C \gg v_A$, on obtient $\frac{v_C^2}{2} = g(h_1 - Z) + g(z_A - z_C) = g(h_1 - h_2 - Z + z)$ d'où

$$\boxed{v_C = \sqrt{2g(h_1 - h_2 + z - Z)}}.$$

**c)** $z(t)$ décroît alors que $Z(t)$ croît, donc par composition $v_C(t)$ **décroît au cours du temps**.

**11. Hauteur du jet**

**a)** On a $P_C = P_D = P_0$, et $v_D = 0$ (vitesse nulle au sommet du jet). La relation de Bernoulli entre $C$ et $D$ s'écrit donc

$$\frac{P_0}{\rho} + \frac{1}{2}v_C^2 + g z_C = \frac{P_0}{\rho} + g(z_C + h) \quad \Leftrightarrow \quad h = \frac{1}{2g}v_C^2\,.$$

*Cette relation s'apparente à celle qu'on obtiendrait en appliquant le théorème de l'énergie cinétique à un point matériel.*

En injectant le résultat précédent on obtient $\boxed{h(t) = h_1 - h_2 + z(t) - Z(t)}$.

**b)** Par les mêmes argument que pour $v_C$, $h(t)$ **est donc décroissante**.

**c)** On obtient $\boxed{h_{\max} = h(0) = h_1 - h_2 + H}$. À la fin, en $t = T$, le récipient supérieur est vide et donc l'inférieur est plein, avec $Z(T) = H - z(T) = H$, donc $\boxed{h_{\min} = h(T) = h_1 - h_2 - H}$.

Ceci conduit à $\boxed{< h > = h_1 - h_2} = \underline{35\,\mathrm{cm}}$.

**d)** Les **phénomènes dissipatifs (viscosité, frottements dans l'air)**, n'ont pas été pris en compte dans notre modèle (en effet, l'application du théorème de Bernoulli suppose que l'on néglige ces phénomènes). Cela conduit à surestimer la hauteur moyenne du jet d'eau.

**12. Durée de la vidange**

**a)** Comme en **10.a)**, par conservation de la matière on obtient que $v_A = \frac{s}{S} v_B$ avec $v_B = v_C$ (car le tube a une section constante) et $v_A = -\frac{dz}{dt}$ car $z(t)$ décroît. En réinjectant l'expression précédente de $v_C$ en **10.b)** ainsi que la conservation $z(t) + Z(t) = H$, on obtient finalement

$$\boxed{\frac{dz}{dt} + \frac{s}{S}\sqrt{2g\,(h_1 - h_2 - H + 2z)} = 0}.$$

**b)** Il s'agit d'une équation à variables séparables :

$$\int_H^0 \frac{dz}{\sqrt{2g\,(h_1 - h_2 - H + 2z)}} = -\int_0^T \frac{s}{S}\,dt \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2g}}\left[\sqrt{h_1 - h_2 - H + 2z}\right]_H^0 = -\frac{s}{S}\,T\,.$$

$$\text{d'où} \quad \boxed{T = \frac{S}{s\sqrt{2g}}\left(\sqrt{h_1 - h_2 + H} - \sqrt{h_1 - h_2 - H}\right)} = \underline{65\,\mathrm{s}}\,.$$

**c)** La durée $T$ augmente si $S$ augmente, si $s$ diminue, et si $H$ augmente. Pour allonger la durée de la vidange, on a donc intérêt à **augmenter la quantité d'eau stockée en augmentant $S$ et $H$, et à diminuer la section $s$ des tubes qui contraint le débit.**

**d)** Comme $< h >= h_1 - h_2$, on a $T = \frac{S}{s\sqrt{2g}}\left(\sqrt{< h > +H} - \sqrt{< h > -H}\right)$. En dérivant on obtient

$$\frac{dT}{d< h >} = \frac{S}{s\sqrt{2g}}\left(\frac{1}{2\sqrt{< h > +H}} - \frac{1}{2\sqrt{< h > -H}}\right) = \frac{S(\sqrt{< h > -H} - \sqrt{< h > +H})}{2s\sqrt{2g}\,\sqrt{< h >^2 - H^2}} < 0$$

donc $T$ **diminue lorsque l'on augmente la hauteur moyenne du jet, à moins d'augmenter en même temps le rapport $\frac{S}{s}$ suffisamment pour augmenter quand même $T$.**





# II. Moteur à réservoir d'air comprimé *(d'après ENSAIT PC 1999)*

## A - Étude du réservoir à air comprimé

**1.** Il faut réaliser la **détente lentement** pour que la détente puisse être isotherme : il faut **laisser le temps aux transferts thermiques** de se faire afin que la température du système puisse rester égale à celle du thermostat (atmosphère) $T_0$. La durée caractéristique de la transformation doit être grande devant la durée caractéristique des échanges thermiques.

**2. a)** Comme la détente est isotherme et le Gaz Parfait (GP), l'énergie interne du gaz dans le réservoir ne varie pas en vertu de la $1^{\text{ère}}$ loi de Joule. Ainsi, le 1er principe de la thermodynamique appliqué au {gaz dans le réservoir} donne :

$$\boxed{0 = -W_{iso} + Q} \Rightarrow \boxed{Q = W_{iso}}$$

car il n'y a pas de mouvement d'ensemble du gaz (statique au début et à la fin) et en négligeant la variation de son énergie potentielle.

**b)** 2ème principe de la thermodynamique appliqué au {gaz dans le réservoir} sur la détente :

$$\Delta S = \frac{Q}{T_0} + S_c \Rightarrow \boxed{S_c = \Delta S - \frac{W_{iso}}{T_0}}$$

**c)** Comme $s_c \geq 0$ avec égalité ssi la transformation est réversible, on a :

$$\Delta S \geq \frac{W_{iso}}{T_0} \Leftrightarrow \boxed{W_{iso} \leq T_0 \Delta S}$$

L'égalité, et donc le **maximum de travail récupérable, est obtenu pour une transformation réversible**.

**3.** On calcule directement le travail des forces de pression fourni au système pour la transformation isotherme, qui est réversible [1] :

$$W_{iso,max} = +\int_1^2 p_r dV_r = \int_1^2 nRT_0 \frac{dV_r}{V_r} = p_{r1}V_{r1}\int_1^2 \frac{dV_r}{V_r} = p_{r1}V_{r1}\,\ln\left(\frac{V_{r2}}{V_{r1}}\right)\,.$$

Avec l'équation d'état du GP on réexprime

$$p_{r1}V_{r1} = nRT_0 = p_{r2}V_{r2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{V_{r2}}{V_{r1}} = \frac{p_{r1}}{p_{r2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{W_{iso,max} = p_{r1}V_{r1}\ln\left(\frac{p_{r1}}{p_{r2}}\right)} = \underline{3,2\,\mathrm{MJ}} > 0$$

**4.** Sur un chemin réversible et donc mécaniquement quasi-statique, et adiabatique, le premier principe s'écrit (pour un GP soumis exclusivement à des forces de pression).

$$dU = \delta Q_{\text{rev}} + \delta W_{\text{rev}} = 0 - P\,dV\,.$$

Pour un GP $PV = nRT$ et $dU = C_v dT = \frac{nR}{\gamma - 1}\,dT$ donc

$$\frac{nR}{\gamma - 1}\,dT + \frac{nRT}{V}\,dV = 0 \quad \Leftrightarrow \quad nR\frac{dT}{T} + (\gamma - 1)nR\frac{dV}{V} = nR\,d\ln\left(TV^{\gamma-1}\right) = 0\,.$$

D'où $\boxed{TV^{\gamma-1} = \text{constante}}$, et en introduisant la loi des GP, on obtient aussi $\boxed{PV^{\gamma} = \text{constante}}$ et $\boxed{T^{\gamma}P^{1-\gamma} = \text{constante}}$.

1. Si on n'admet pas ce résultat, on peut le calculer ainsi : $W_{iso,max} = T_0\Delta S$ puis calculer la variation d'entropie d'un GP pour une isotherme en fonction des pressions.

**5.** On peut là encore faire un calcul direct du travail pour la détente adiabatique réversible, via

$$W_{adi,max} = + \int_1^2 p_r dV_r = \int_1^2 P_{r1} V_{r1}^{\gamma} \frac{dV_r}{V_r^{\gamma}} = \dots$$

ou utiliser le premier principe :

$$\Delta U = \frac{nR}{\gamma - 1} \Delta T_r = -W_{adi,max} + 0 \Rightarrow W_{adi,max} = \frac{p_{r1}V_{r1} - p_{r2}V_{r2}}{\gamma - 1} = \frac{p_{r1}V_{r1}}{\gamma - 1}\left(1 - \frac{p_{r2}V_{r2}}{p_{r1}V_{r1}}\right)$$

Or, d'après la loi de Laplace :

$$p_{r2}V_{r2}^{\gamma} = p_{r1}V_{r1}^{\gamma} \quad \Rightarrow \quad \frac{V_{r2}}{V_{r1}} = \left(\frac{p_{r1}}{p_{r2}}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad \Rightarrow \quad \frac{p_{r2}V_{r2}}{p_{r1}V_{r1}} = \left(\frac{p_{r2}}{p_{r1}}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}$$

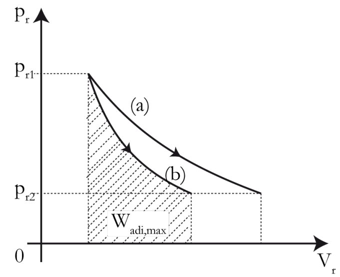
D'où :

$$\boxed{W_{adi,max} = \frac{p_{r1}V_{r1}}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{p_{r2}}{p_{r1}}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}\right]} = \underline{1,84\,\mathrm{MJ}} < W_{iso,max}$$

**6.** L'isotherme est donnée par $p_r V_r = cte$ et l'adiabatique (réversible) par $p_r V_r^{\gamma} = cte$ avec $\gamma > 1$. On a alors le diagramme de Watt ci-contre pour une détente qui va de $p_{r1}$ à $p_{r2}$.
Les travaux récupérables représentent l'**aire sous la courbe** des transformations. On voit graphiquement que

$$\boxed{W_{iso,max} > W_{adi,max}}$$

ce qui est conforme à ce que nous avons calculé.




**7.** L'unité S.I. de $a$ est $\boxed{W.K^{-1}}$.

**8.** Premier principe entre $t$ et $t + dt$ appliqué au {gaz dans le réservoir} :

$$dU = \frac{nR}{\gamma - 1} dT_r = -p_r dV_r + P_{th} dt = -\frac{nRT_r}{V_r} dV_r - a(T_r - T_0)dt$$

Alors :

$$\frac{nR}{\gamma - 1}\frac{dT_r}{dt} = -\frac{nRT_r}{V_r}\frac{dV_r}{dt} - a(T_r - T_0)$$

D'où :

$$\frac{dT_r}{dt} + \frac{a(\gamma - 1)}{nR}(T_r - T_0) = -(\gamma - 1)\frac{T_r}{V_r}\frac{dV_r}{dt}$$

On obtient bien l'équation différentielle demandée :

$$\boxed{\frac{dT_r}{dt} + \frac{T_r - T_0}{\tau'} = \xi \frac{T_r}{V_r}\frac{dV_r}{dt}} \text{ avec } \boxed{\tau' = \frac{p_{r1}V_{r1}}{a(\gamma - 1)T_0}} \text{ et } \boxed{\xi = 1 - \gamma}$$

**9.** La constante $\tau$ représente la **durée caractéristique de la détente**, alors que $\tau'$ est la **constante de temps caractéristique des transferts thermiques** à travers la paroi du cylindre.
Ainsi, si $\tau \gg \tau'$ **la détente est lente par rapport aux transferts thermiques** donc la transformation tend à être **isotherme**.
Au contraire, lorsque $\tau \ll \tau'$, **la détente est rapide par rapport aux transferts thermiques** donc la transformation tend à être **adiabatique**.





**10.** Au minimum de $T_r$ sa dérivée est nulle. L'équation différentielle devient alors, compte tenu du fait que $\frac{dV_r}{dt} = \frac{V_{r1}}{\tau}$ :

$$0 + \frac{T_{rm} - T_0}{\tau'} = \xi \frac{T_{rm}}{V_{r1}(1 + t_m/\tau)} \frac{V_{r1}}{\tau} = \frac{\xi T_{rm}}{t_m + \tau} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{t_m = \xi \tau' \frac{T_{rm}}{T_{rm} - T_0} - \tau}.$$

**11.** On lit $\boxed{T_{rm} = 1,7 \times 10^2\,\mathrm{K}}$, ce qui donne $\boxed{t_m = 15 \times 10^2\,\mathrm{s}}$ et donc $\boxed{p_{rm} \approx 7\,\mathrm{bar}}$.

**12.** L'expression de $W_k$ est identique à celle calculée en question **5.** pour la loi de Laplace, en remplaçant simplement $\gamma$ par $k$. Ainsi :

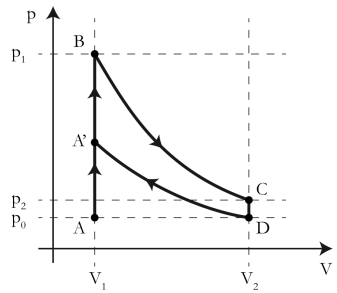
$$\boxed{W_k = \frac{p_{r1}V_{r1}}{k - 1}\left[1 - \left(\frac{p_{r2}}{p_{r1}}\right)^{1-\frac{1}{k}}\right]} = \underline{1,91\,\mathrm{MJ}}$$

On trouve bien $W_{adi,max} < W_k < W_{iso,max}$.

## B - Étude du moteur

**13.** La pression dans la chambre est minimale au moment de l'échappement lors de la mise en contact avec l'air atmosphérique, et égale à $P_0$. Pour que le moteur fonctionne il faut donc que la pression à l'admission depuis le réservoir soit nettement supérieure à $P_0$ sinon le piston ne peut être repoussé sur une course non nulle. Or la pression à l'admission va progressivement baisser à chaque cycle à mesure que le réservoir se vide.

**14.** *Remarque : il faut noter que, comme l'indique la légende de la Figure 6 dans l'énoncé, le graphe ne représente pas l'état du système (qui n'effectue pas un cycle et sort sous pression du réservoir), mais les valeurs de $(p, V)$ mesurées dans la chambre à l'instant $t$.*
$AB$ correspond à l'**admission** d'air comprimé dans le cylindre (piston au point mort extérieur)
$BC$ à la phase de **descente du piston**
$CD$ à l'**échappement** de l'air dans l'atmosphère (piston au point mort intérieur)
$DA'$ correspond à la phase de **remontée du piston**.




**15.** La descente $BC$ du piston étant adiabatique réversible, on applique la loi de Laplace pour l'air situé dans le cylindre (assimilé à un GP) :

$$\boxed{p_2 = p_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma}}$$

La condition $p_2 \geq p_0$ donne :

$$\boxed{p_1 \geq p_0 \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma}} = \underline{25,2\,\mathrm{bar}}$$

**16.** La loi de Laplace donne également :

$$T_2 V_2^{\gamma - 1} = T_1 V_1^{\gamma - 1} \Rightarrow \boxed{T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1}} = \underline{139\,\mathrm{K}}$$

**17.** Dans l'état final de cette nouvelle détente, la pression est uniforme dans l'atmosphère et le cylindre ouvert sur l'atmosphère. Ainsi $\boxed{p_3 = p_0}$.
La loi de Laplace donne alors :

$$\boxed{T_3 = T_2 \left(\frac{p_2}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma} - 1}}$$

En remplaçant $T_2$ et $p_2$ par leurs expressions il reste :

$$\boxed{T_3 = T_1 \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}-1}}$$

**18.** On calcule les travaux directement grâce à la loi de Laplace.

— Phase de descente (on exclut la partie de 2 à 3 qui ne transmet pas de travail au piston mais directement à l'air extérieur) :

$$W_d = -\int_1^2 pdV = -\int_1^2 p_1 V_1^\gamma \frac{dV}{V^\gamma} = -p_1 V_1^\gamma \left[\frac{V^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right]_1^2$$

$$\Rightarrow \boxed{W_d = \frac{p_1 V_1^\gamma}{\gamma - 1}\left(V_2^{1-\gamma} - V_1^{1-\gamma}\right) = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1}\left(\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1-\gamma} - 1\right)} = \underline{-75\,\mathrm{J}}\,.$$

— Phase de remontée : c'est le même calcul en permutant les indices de volume et en partant de la pression $p_0$ cette fois.

$$\boxed{W_r = \frac{p_0 V_2^\gamma}{\gamma - 1}\left(V_1^{1-\gamma} - V_2^{1-\gamma}\right) = \frac{p_0 V_2}{\gamma - 1}\left(\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{1-\gamma} - 1\right)} = \underline{19\,\mathrm{J}}\,.$$

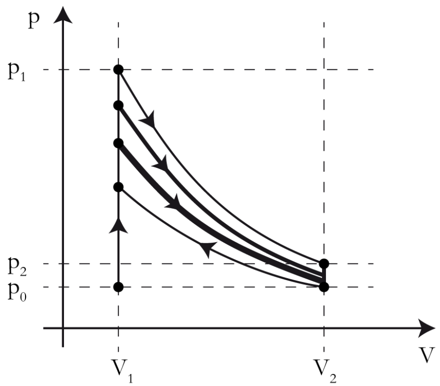
**19.** Pour l'air dans la chambre, le piston représente l'extérieur, donc le travail qu'il fourni est celui reçu par l'air calculé précédemment. Comme il n'y a pas de travail du piston au cours des phases d'échappement et d'admission (le piston reste immobile dans ces phases), alors :

$$\boxed{W_T = W_d + W_r} = \underline{-56\,\mathrm{J}} < 0$$

**20.** L'arrêt du moteur se produit pour : $W_T = 0 \Leftrightarrow W_d = -W_r \Leftrightarrow p_1 V_1^\gamma = p_0 V_2^\gamma$.
D'où :

$$\boxed{p_{1,min} = p_0 \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^\gamma} = \underline{25,2\,\mathrm{bar}}$$

*Remarque : il s'agit de la valeur de $p_1$ trouvée précédemment, pour laquelle $p_2 = p_0$, c'est-à-dire correspondant à deux courbes de détente et de compression confondues sur le cycle (dont l'aire est donc nulle). En effet, une fois ce premier « cycle[2] » parcouru, la pression remonte à une valeur inférieure à $p_1$ car il y a de moins en moins d'air dans le réservoir au fur et à mesure des admissions d'air dans le cylindre. Le « cycle » est alors de plus en plus serré, le travail fourni par le piston est de moins en moins important au cours du temps et le moteur s'arrête lorsque la pression à l'issue de la descente du piston vaut $p_0$.*




2. Ce n'est pas réellement un cycle puisque l'on ne redémarre pas à la même pression.