THERMODYNAMIQUE

CALCULATRICES AUTORISÉES

I. Étude de la fontaine de Héron

Ce problème propose d'étudier la fontaine de Héron, qui doit son nom au savant grec Héron d'Alexandrie (1er siècle après J.C.). Cette fontaine est un dispositif astucieux qui permet de faire jaillir de l'eau sans utiliser de pompe.

La fontaine est constituée de deux récipients fermés partiellement remplis d'eau, surmontés d'une coupelle (voir figure 1).
Un premier tube T_1 relie le fond de la coupelle au fond du récipient du bas. Un second tube T_2 plonge au fond du récipient du haut, et émerge au-dessus de de la coupelle. Un troisième tube T_3 relie les parties supérieures des deux récipients, contenant de l'air. Lorsqu'on remplit la coupelle d'eau, l'eau du récipient du haut jaillit par le tube au-dessus de la coupelle, qui ensuite se vide dans le récipient du bas. Lorsque le récipient du haut est vide, la fontaine s'arrête.

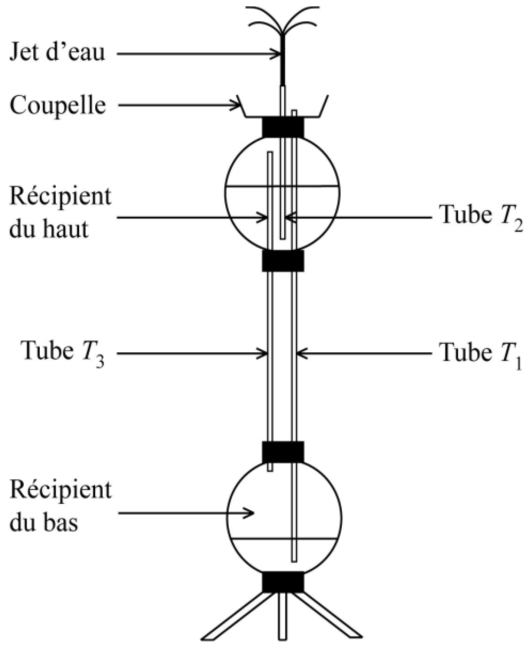

FIGURE 1 – Fontaine de Héron.

La fontaine de Héron est basée sur le principe du siphon, que nous étudierons dans un premier temps. Dans tout le problème, le liquide de la fontaine de Héron est de l'eau, dont la masse volumique ρ est supposée uniforme et constante. On note g l'intensité de la pesanteur.

I.1. Loi de l'hydrostatique et principe du siphon

1. Établir la loi de la statique des fluides. On prendra un axe vertical ascendant.
2. En déduire la loi de l'hydrostatique, qui sera applicable dans le cas présent pour l'eau.

Le principe du siphon est représenté sur la figure 2 une extrémité A d'un tuyau est plongée dans un récipient rempli d'eau, et l'autre extrémité B est placée dans l'air. On amorce initialement le siphon en aspirant l'eau en B, afin de remplir le tuyau d'eau. On constate alors que si l'extrémité B du tuyau est placée au-dessous du niveau initial de la surface de l'eau (repéré par le point C), alors l'eau du récipient se vide spontanément par l'extrémité B du tuyau. C'est l'effet siphon. On note z_A l'altitude du point A, z_B celle du point B et z_C celle du point C. La pression atmosphérique est notée P_0.

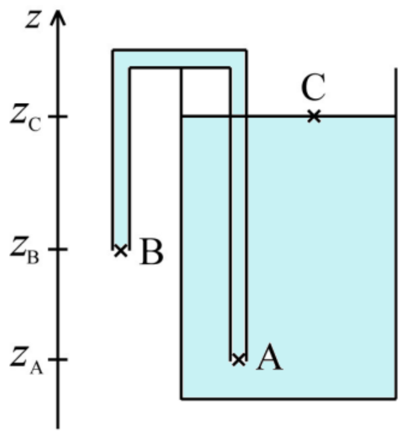

FIGURE 2 – Siphon.

3. On bouche le tuyau en B. L'eau ne s'écoule plus et est à l'équilibre. On peut alors appliquer la loi de l'hydrostatique. En déduire la pression P_A en A en fonction de P_0, ρ, g, z_A et z_C.

Lorsque l'eau s'écoule, on ne peut plus appliquer la loi de l'hydrostatique car le fluide n'est plus au repos. On suppose l'écoulement stationnaire, et sans dissipation visqueuse ou thermique. On peut alors appliquer la *loi de Bernoulli*[1] sur une *ligne de courant*[2] entre les points A et B. Les normes de la vitesse de l'eau aux points A, B et C sont notées respectivement v_A, v_B et v_C. La loi de Bernoulli[3] s'écrit alors, par exemple entre A et B :

$$\frac{P_A}{\rho} + \frac{1}{2}v_A^2 + gz_A = \frac{P_B}{\rho} + \frac{1}{2}v_B^2 + gz_B\,.$$

4. On suppose que le tuyau est de section constante, et donc que le débit entrant en A est le même que le débit sortant en B, si bien que $v_A = v_B$. Exprimer alors la pression P'_A en A en fonction de P_0, ρ, g, z_A et z_B.

5. On note S la section horizontale du récipient, et s celle du tuyau. En raisonnant sur la conservation de la matière pendant un petit intervalle de temps dt, établir une relation entre les vitesses v_A et v_C.

6. En déduire comment le siphon fonctionne, et expliquer pourquoi il est nécessaire que l'extrémité libre B du tuyau soit placée au-dessous du niveau de la surface de l'eau (z_C).

I.2. Fontaine de Héron

7. Expliquer qualitativement en quoi la fontaine de Héron peut être vue comme un siphon. Quel récipient se vide dans quel autre ? Reproduire le schéma de la figure 1 et y représenter par des flèches le sens d'écoulement de l'eau dans chaque tuyau.

On cherche à évaluer la vitesse d'éjection de l'eau à la sortie du tube T_2, la hauteur du jet en sortie du tube T_2, ainsi que la durée au bout de laquelle la fontaine s'arrête.

La figure 3 schématise les deux récipients, la coupelle et les tubes qui les relient.
Les récipients sont identiques, de sectionn horizontale S. La hauteur d'eau dans le récipient du haut est notée $z(t)$, et celle dans le récipient du bas $Z(t)$. Les trois tubes ont la même section s. Le tube T_1 est de hauteur h_1 et le tube T_2 de hauteur h_2. La pression atmosphérique est notée P_0.

Le point A (respectivement A') est à la surface de l'eau, dans le récipient du haut (respectivement du bas). Le point B est à l'entrée du tube T_2, supposée quasiment au même niveau que le fond du récipient du haut, si bien que $z(t) = z_A(t) - z_B$. De même, le point B' est à l'entrée du tube T_1, supposée quasiment au même niveau que le fond du récipient du bas, si bien que $Z(t) = z'_A(t) - zB'$. Le point C est situé à la sortie du tube T_2, donc $h_2 = z_C - z_B$. Le point D est situé en haut du jet d'eau. La hauteur du jeu d'eau est notée $h(t) = z_D(t) - z_C$.

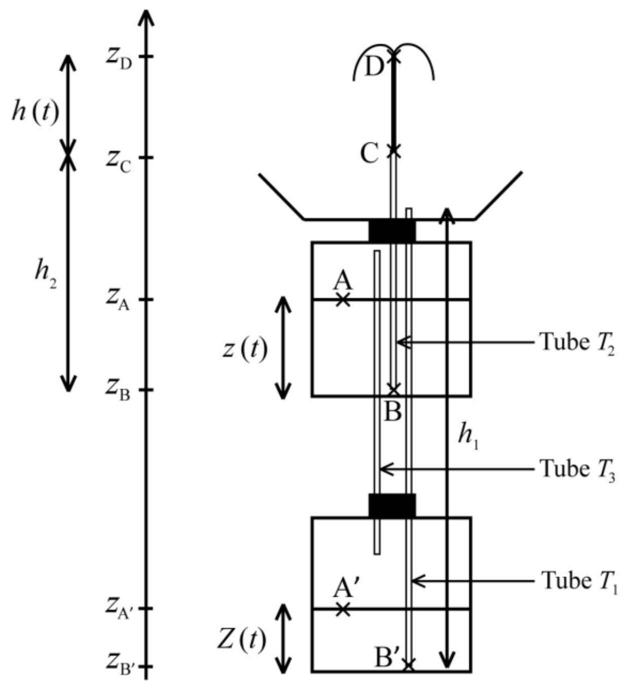

FIGURE 3 – Schéma coté de la fontaine de Héron.

1. Démonstration en SPE.
2. Une ligne de courant est un chemin en tout point colinéaire à la vitesse du fluide. Ainsi en régime stationnaire (écoulement indépendant du temps), les gouttes de fluide suivent les lignes de courant au cours de leur mouvement.
3. On remarque que cette loi est en quelque sorte une généralisation de la loi de l'hydrostatique en présence d'un écoulement, mais valable seulement sous certaines hypothèses : stationnarité, incompressibilité, absence de viscosité.

Les normes de la vitesse de l'eau aux points A, B et C sont notées respectivement v_A, v_B et v_C.

Les variations de débit sont supposées suffisamment lentes pour que les écoulements puissent être considérés comme stationnaires, donc la loi de Bernoulli sera applicable. En outre $Z(t)$ et $z(t)$ varient suffisamment lentement pour qu'on puisse appliquer la loi de l'hydrostatique dans les récipients **en des points situés loin des entrées des tubes T_1 et T_2.**

On suppose qu'à l'instant initial, la fontaine vient d'être amorcée, les tubes T_1 et T_2 sont remplis d'eau, la coupelle est quasi vide, le récipient du haut est rempli, et le récipient du bas contient très peu d'eau : $z(t=0) = H$ et $Z(t=0) = 0$.

Données : $g = 9,8\text{m.s}^{-2}$; $h_1 = 60\,\text{cm}$; $h_2 = 25\,\text{cm}$; $H = 15\,\text{cm}$; la section S des récipients est circulaire, de rayon $R = 5\,\text{cm}$ de côté ; la section intérieure s des tubes est circulaire, de rayon $r = 1,5\,\text{mm}$ de diamètre.

8. Quel est la relation qui lie $Z(t)$ et $z(t)$?

9. P'_A est la pression de l'air dans le récipient du bas. Déterminer la pression P'_A en A' en fonction de P_0, ρ , g, h_1 et Z.

10. Vitesse du jet

- **a)** Montrer que l'on peut considérer que $v_C \gg v_A$.
- **b)** Appliquer le théorème de Bernoulli entre les points A et C, en négligeant la vitesse v_A devant la vitesse v_C. L'eau étant à l'air libre en C, on admettra que $P_C = P_0$.
  En déduire l'expression de $v_C(t)$ en fonction de h_1, h_2, $z(t)$, $Z(t)$ et g.
- **c)** Comment évolue $v_C(t)$ entre l'instant initial et l'instant où la fontaine s'arrête ?

11. Hauteur du jet

- **a)** Déterminer l'expression de la hauteur $h(t)$ du jet en fonction de h_1, h_2, $z(t)$ et $Z(t)$.
- **b)** Comment la hauteur $h(t)$ évolue-t-elle entre l'instant initial et l'instant où la fontaine s'arrête ?
- **c)** On note $h_{\min}$ et $h_{\max}$ les valeurs minimale et maximale de $h(t)$. Que vaut la « hauteur moyenne » du jet d'eau définie par $< h >= \frac{1}{2}(h_{\min} + h_{\max})$? Faire l'application numérique.
- **d)** En pratique, on observe que la hauteur du jet d'eau ne dépasse pas 20 cm. Comment peut-on expliquer cette différence ?

12. Durée de la vidange

- **a)** En faisant un bilan de quantité de matière dans le récipient supérieur, établir l'équation différentielle suivante :
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + \frac{s}{S}\sqrt{2g\,(h_1 - h_2 - H + 2z)} = 0\,.$$
- **b)** Intégrer cette équation différentielle entre $t = 0$ et l'instant $t = T$ auquel la fontaine s'arrête. En déduire l'expression de T en fonction de s, S, g, h_1, h_2 et H. Faire l'application numérique.
- **c)** Comment doit-on faire varier s, S et H pour augmenter la durée de fonctionnement de la fontaine ?
- **d)** Pour une valeur de H fixée, peut-on à la fois augmenter la hauteur moyenne du jet d'eau et la durée de fonctionnement de la fontaine ?

II. Moteur à réservoir d'air comprimé

Aucune connaissance sur le cours sur les machines thermiques n'est nécessaire pour traiter ce problème.
Le moteur à air comprimé présenté dans ce problème est un moteur à piston, alimenté par de l'**air comprimé que l'on assimile dans tout le problème à un gaz parfait**. L'air comprimé provient d'un réservoir non représenté sur les schémas, de volume $V_{r1} = 0,2\,\text{m}^3$ ayant une pression initiale $p_{r1} = 100\,\text{bar}$ et une température initiale $T_{r1} = T_0$.

La partie A- étudie le fonctionnement du réservoir à air comprimé et la partie B- étudie le fonctionnement du moteur, alimenté par ce réservoir. Les deux parties A- et B- sont très largement indépendantes : n'hésitez à passer à la partie B- en cas de blocage sur la A-.

Données pour l'ensemble du problème :
constante des gaz parfaits : $R = 8,31\,\mathrm{J.mol^{-1}.K^{-1}}$;
pression atmosphérique : $p_0 = 1,0\,\mathrm{bar} = 1,0.10^5\,\mathrm{Pa}$;
température de l'atmosphère, supposée constante : $T_0 = 300\,\mathrm{K}$;
rapport des capacités thermiques massiques de l'air : $c_p/c_v = \gamma = 1,4$;

A - Étude du réservoir à air comprimé

Dans cette étude où l'air subit des détentes dans le réservoir à air comprimé, on pourra imaginer que l'air comprimé du réservoir est placé dans un cylindre fermé par un piston mobile ; la fin de la détente correspondant à une pression de l'air égale à $p_{r2} = 20\,\mathrm{bar}$ (cette valeur finale n'est aussi valable que pour la partie A -). On rappelle que l'on considérera l'air comme un gaz parfait.

a- Détente isotherme

On suppose dans cette section **a-** que l'air du réservoir est détendu de manière isotherme à la température T_0, égale à celle de l'atmosphère extérieure.

1. La détente doit-elle être réalisée lentement ou rapidement ? Justifier.

2. **a)** On note W_{iso} le travail récupérable par l'extérieur (fourni par l'air du réservoir) lors de la transformation. Exprimer le transfert thermique Q reçu par l'air du réservoir en fonction de W_{iso}.

b) Relier l'expression de l'entropie créée S_c par l'air du réservoir, au cours de la détente, à W_{iso}, T_0 et à la variation d'entropie du même système ΔS.

c) En déduire que le travail récupérable sera maximal lorsque la transformation est réversible.

3. Déterminer le travail $W_{iso,max}$ maximal récupérable au cours de cette détente, en fonction de p_{r1}, p_{r2} et V_{r1}. Évaluer numériquement $W_{iso,max}$.

b- Détente adiabatique

On suppose dans cette section **b-** que l'air est détendu de manière adiabatique, et non plus de manière isotherme comme au **a-**. On admettra que le travail récupérable est à nouveau maximal lorsque la transformation qui a lieu est réversible.

4. Démontrer la loi de LAPLACE pour la transformation adiabatique réversible d'un gaz parfait (γ constant).

5. Calculer le travail mécanique $W_{adi,max}$ maximal récupérable (fourni par l'air du réservoir) au cours d'une telle détente.
Évaluer numériquement $W_{adi,max}$.

6. Sur un même diagramme de WATT (p, V), représenter les détentes subies par le gaz du réservoir entre l'état 1 et l'état 2, dans les deux situations réversibles (a) isotherme et (b) adiabatique.
Indiquer comment on peut y lire graphiquement $W_{iso,max}$ et $W_{adi,max}$. Comparer les travaux dans les deux situations.

c- Détente réelle

En réalité, l'expérience montre que l'air ne subit ni une détente isotherme ni une détente adiabatique ; un transfert thermique à travers les parois du réservoir accompagne la détente. Ce transfert est modélisé par une relation du type :

$$P_{th} = -a(T_r - T_0) \tag{1}$$

où P_{th} est la puissance thermique reçue par l'air, T_r est la température supposée uniforme de cet air au sein du réservoir ; a est une constante.

7. Quelle est l'unité S.I. de la constante a ?

La détente étant supposée mécaniquement quasi-statique, on étudie la transformation élémentaire subie par l'air entre les instants t et $t + dt$.

8. Réaliser un bilan énergétique sur la transformation élémentaire de l'air dans le réservoir, pour obtenir une relation différentielle liant les variables T_r, V_r et t qui sont respectivement la température de l'air dans le réservoir, le volume occupé par cet air et le temps t. Mettre l'équation différentielle sous la forme :

$$\frac{dT_r}{dt} + \frac{T_r - T_0}{\tau'} = \xi \frac{T_r}{V_r} \frac{dV_r}{dt} \qquad (2)$$

où τ' et ξ sont des constantes à exprimer à partir de a, γ, p_{r1}, V_{r1} et T_0.

Résoudre cette équation différentielle (on ne demande pas de le faire) nécessite de se donner une loi d'évolution du volume V_r avec t. On choisit la loi d'évolution suivante, où τ est une constante :

$$V_r = V_{r1}\left(1 + \frac{t}{\tau}\right) \qquad (3)$$

9. Par des arguments physique, justifier le choix de τ par rapport à τ', constante caractéristique du dispositif, pour retrouver :
- — la transformation isotherme ;
- — la transformation adiabatique.

La résolution de l'équation différentielle pour $\tau = 200\,\text{s}$ et $a = 5,0\,\text{S.I.}$ conduit aux graphes de la figure 4.

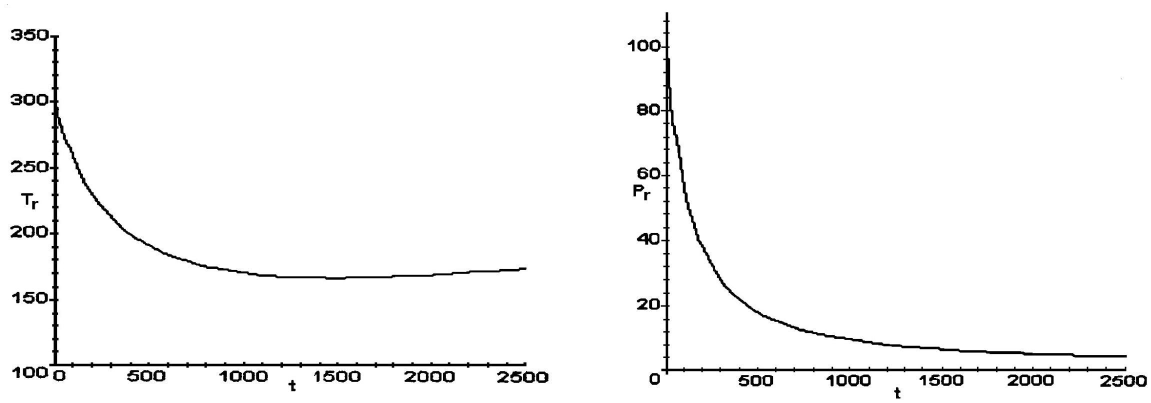

FIGURE 4 – À gauche : évolution de T_r (en K) en fonction du temps t (en s). À droite : évolution de p_r (en bar) en fonction du temps t (en s).

10. On appelle T_{rm} la température minimale et t_m l'instant pour lequel cette température est atteinte. Établir l'expression de t_m en fonction de T_{rm} et des constantes T_0, τ, τ' et ξ.

11. Évaluer T_{rm} graphiquement et en déduire t_m à l'aide de l'équation obtenue à la question **10.**. Déterminer alors graphiquement p_{rm}.

p_{rm} étant inférieure à p_{r2}, les variations de pression et de température au cours de la détente sont monotones. En conséquence, on modélise la transformation subie par le gaz par une loi, liant sa pression et son volume, du type $p_r V_r^k = cte$. Un ajustement des courbes donne $k = 1,3$.

12. En déduire, littéralement puis numériquement, le travail mécanique récupérable W_k au cours de la détente réelle.

B - Étude du moteur

Dans cette partie, on s'intéresse au moteur (moteur de marteau-piqueur par exemple) actionné par le gaz comprimé sortant du réservoir. On considère toujours ici l'air comme un gaz parfait.

Le principe de fonctionnement du moteur est illustré sur la figure 5. L'air comprimé arrive par la canalisation supérieure et ne peut pénétrer dans le cylindre que lorsque la bille est poussée par le petit ergot situé sur le piston. L'admission de l'air n'est donc possible que lorsque le cylindre est en « position haute » (point mort extérieur). Le cylindre étant doté de petites ouvertures, l'échappement n'est permis que lorsque le cylindre est en « position basse » (point mort intérieur).

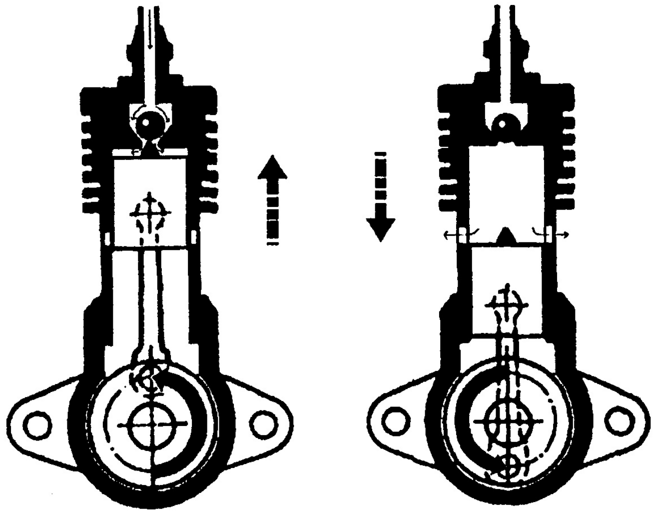

FIGURE 5 – Moteur à air comprimé. Schéma de gauche : piston au point mort extérieur, l'air pénètre dans le cylindre. Schéma de droite : piston au point mort intérieur, il y a échappement de l'air par les ouvertures latérales du cylindre.

Pour simplifier, on suppose que le remplissage est instantané (admission de matière dans le cylindre) lorsque le piston est situé au point mort extérieur ; le volume offert au gaz dans le cylindre est alors de $V_1 = 5,0\,\mathrm{cm}^3$. En fin d'admission, la température de l'air dans le cylindre est $T_1 = 350\,\mathrm{K}$. On suppose également que l'air s'échappe instantanément du cylindre (perte de matière dans le cylindre) lorsque le piston est au point mort intérieur ; le volume offert est alors de $V_2 = 50\,\mathrm{cm}^3$.
On suppose que lors de la descente du piston (et lors de la remontée), la transformation subie par le gaz est adiabatique et réversible.

13. Après plusieurs aller-retours, le moteur s'arrête. Expliquer succinctement pourquoi l'arrêt intervient avant que la pression du réservoir n'égale P_0 : pression atmosphérique.

14. Reproduire sur votre copie la figure 6 ci-contre représentant le premier « cycle » du moteur et la compléter : orienter le cycle, donner des noms aux différents points du diagramme (P, V) et préciser à quelles parties correspondent les différentes phases de fonctionnement du moteur (admission, échappement, remontée et descente du piston).

15. Si la pression en fin d'admission est p_1, quelle est son expression juste avant l'échappement : p_2 ?
Donner la condition (littéralement et numériquement) sur p_1 pour que l'on ait p_2 supérieure ou égale à la pression atmosphérique p_0.

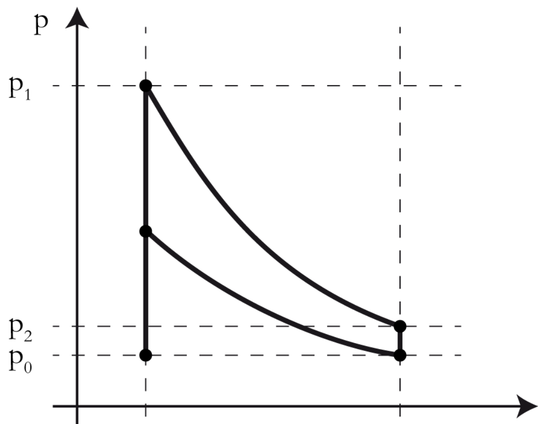

FIGURE 6 – Démarrage du moteur : premier aller-retour du piston. On représente la pression p dans le cylindre en fonction de son volume V.

16. Exprimer littéralement puis calculer numériquement la température juste avant l'échappement : T_2.

17. Si $p_2 > p_0$, l'air contenu dans le cylindre subit une nouvelle détente, au cours de l'échappement, qui s'opère dans l'air atmosphérique (mais le piston reste à son point mort intérieur). On admet que cette détente est de type adiabatique réversible pour l'air restant dans le cylindre. Quelle est sa pression finale p_3 ?
En déduire sa température T_3 en fonction de T_2, p_2, p_0 et γ, puis en fonction de T_1, p_1, p_0 et γ.

18. Déduire des questions précédentes le travail reçu par l'air contenu dans le cylindre :

— lorsque le piston passe du point mort extérieur au point mort intérieur (descente du piston) ; on donnera ce travail, noté W_d, en fonction de p_1, V_1, V_2 et γ.

— lorsque ce piston passe du point mort intérieur au point mort extérieur (remontée du piston) ; on donnera ce travail, noté W_r, en fonction de p_0, V_2, V_1 et γ.

19. Calculer numériquement le travail total W_T fourni par le piston au cours d'un aller-retour, au début du fonctionnement du moteur, c'est à dire pour $p_1 \approx 100\,\text{bar}$.

20. On estime que le moteur s'arrête lorsque ce travail W_T s'annule. En déduire la pression minimale p_{1min} du réservoir à air comprimé en deçà de laquelle le moteur s'arrête.

* * * Fin de l'épreuve * * *