

MÉCANIQUE

CALCULATRICES AUTORISÉES

I. Détection des planètes extra-solaires par la méthode des vitesses radiales

NOTATIONS ET DONNÉES NUMÉRIQUES

- Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3,0 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$
- Constante de la gravitation : $\mathcal{G} = 6,7 \times 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$
- Masse du Soleil : $M_{\odot} = 2,0 \times 10^{30} \text{ kg}$
- Masse de la Terre : $M_T = 6,0 \times 10^{24} \text{ kg}$
- Distance moyenne Soleil-Terre : $D_T = 1,5 \times 10^{11} \text{ m} = 1 \text{ UA}$ (Unité Astronomique)

La première méthode fiable de détection des exoplanètes repose sur l'exploitation du fait que l'interaction gravitationnelle entre une étoile et une planète a non seulement un impact sur le mouvement de la planète, mais aussi, et réciproquement, sur le mouvement de l'étoile. C'est la mesure de ce mouvement stellaire, et plus précisément de la vitesse radiale de l'étoile, c'est-à-dire de la composante de sa vitesse projetée sur la ligne de visée la reliant à l'observateur, qui permet de détecter l'existence d'une planète en orbite autour de cette étoile. Dans cette partie, nous allons établir l'expression de cette vitesse radiale, en fonction des différents paramètres physiques du problème. Celle-ci sera alors mesurable par effet Doppler.

I.1. Réduction du problème de Kepler à deux corps

On considère le problème suivant, dit de Kepler : un système constitué d'une étoile E , de masse M , et d'une planète P , de masse m , toutes deux assimilées à des objets ponctuels, en interaction gravitationnelle. On fait l'hypothèse que ce système est isolé, et on se place dans un référentiel \mathcal{R} , supposé galiléen, attaché à un observateur terrestre O . On note $\vec{R}_E = \vec{OE}$ le rayon vecteur liant cet observateur à l'étoile, $\vec{R}_P = \vec{OP}$ celui le liant à la planète, et $\vec{r} = \vec{R}_P - \vec{R}_E$ le rayon vecteur liant l'étoile à la planète.

1. Exprimer le Principe Fondamental de la Dynamique (PFD, ou le Théorème de la Résultante Cinétique...) pour chacun des deux corps dans \mathcal{R} . On explicitera la force.
2. On note G le centre de masse du système. Déterminer son rayon vecteur $\vec{R}_G = \vec{OG}$ en fonction des paramètres du problème, et de $\vec{R}_E = \vec{OE}$ et $\vec{R}_P = \vec{OP}$.
3. Montrer que le mouvement du centre de masse G est rectiligne uniforme dans \mathcal{R} .
Dans toute la suite du problème, on supposera, sans perte de généralité, que G est fixe par rapport à O , et donc $\vec{R}_G = \vec{Constante}$. Le référentiel *barycentrique* \mathcal{R}_G (centré sur G) est alors confondu avec \mathcal{R} .
4. Exprimer les vecteurs \vec{R}_E et \vec{R}_P en fonction de \vec{R}_G , \vec{r} , et des masses m et M . En déduire les vecteurs position \vec{r}_E et \vec{r}_P des deux astres par rapport au centre de masse G en fonction de \vec{r} .
5. En déduire que le mouvement relatif de P par rapport à E obéit à l'équation

$$\mu \left. \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \right|_{\mathcal{R}_G} = \vec{F} \quad \text{où} \quad \mu = \frac{mM}{m+M} \quad (1)$$

où l'on explicitera l'expression de la force \vec{F} .

Une fois qu'on aura résolu le mouvement relatif décrit par l'équation (1), ce qu'on fera dans la partie suivante, comment s'en déduiront les trajectoires de E et P dans le référentiel \mathcal{R} ? Pourquoi dit-on que l'on a ainsi réduit le problème de Kepler?

Dans la suite on pourra poser $M_t = M + m$ pour désigner la masse totale du système.

1.2. Résolution du mouvement relatif

On considère donc le mouvement $\vec{r}(t)$, décrit par l'équation (1), d'une particule ponctuelle fictive X de masse μ , soumise à la force centrale $\vec{F} = F(r)\vec{e}_r$, dans le référentiel \mathcal{R} . Le vecteur \vec{e}_r est le vecteur unitaire radial dirigé vers l'extérieur du centre de force, et $r = \|\vec{r}\|$. On note \vec{v} le vecteur vitesse de X .

6. Montrer que la force \vec{F} trouvée en Eq. (1) dérive d'une énergie potentielle $E_p(r)$ dont on établira l'expression.
7. Montrer que le moment cinétique $\vec{L} = \vec{r} \wedge \mu\vec{v}$ de X par rapport au centre de force G se conserve. Quelle conséquence peut-on en tirer quant à la trajectoire de X ? Justifier.
8. On prend comme coordonnées un système cylindrique (r, θ, z) dans lequel l'axe Gz est celui portant le moment cinétique, $\vec{L} = L\vec{e}_z$. Exprimer \vec{L} en fonction de ces coordonnées.
9. Montrer que l'énergie mécanique E_m de X se conserve, et qu'elle peut se mettre sous la forme

$$E_m = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + E_{p,\text{eff}}(r), \quad (2)$$

où $E_{p,\text{eff}}(r)$ est une énergie potentielle effective qu'on exprimera en fonction de $E_p(r)$, L , μ , et r .

10. Représenter graphiquement l'énergie potentielle effective $E_{p,\text{eff}}(r)$. Discuter la nature des trajectoires en fonction de la valeur de E_m . En particulier, quelle est la condition sur E_m pour que la trajectoire de la particule X soit bornée? **On se place dans ce cas de figure pour le reste du problème.**
11. En posant $u = 1/r$, montrer (toujours par un raisonnement énergétique) que les distances minimale r_{\min} (périastre) et maximale r_{\max} (apoastre) entre le centre de force G et la particule fictive X peuvent se mettre sous la forme

$$r_{\min} = \frac{p}{1+e} \quad \text{et} \quad r_{\max} = \frac{p}{1-e} \quad (3)$$

On exprimera les paramètres p et e en fonction de \mathcal{G} , μ , M_t , L et E_m . Quelles sont les bornes des valeurs possibles de e ?

12. Montrer, à partir de l'équation énergétique (2), que si l'on considère la trajectoire de X par le biais de $u(\theta)$ plutôt que par celui du couple $\{r(t), \theta(t)\}$, on aboutit à une équation de la forme

$$E_m = A_0 \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + A_1 u^2 + A_2 u \quad (4)$$

où l'on précisera l'expression des constantes A_0 , A_1 et A_2 en fonction de L , μ , M_t et \mathcal{G} .

13. En déduire que u obéit à une équation d'oscillateur harmonique. En posant comme condition "initiale" que X passe au périastre lorsque $\theta = 0$, en déduire que la trajectoire a pour équation

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad (5)$$

qui est celle d'une ellipse. Les coefficients p et e sont respectivement le *paramètre* et l'*excentricité* de cette ellipse.

14. **On se place désormais, pour toute la suite du problème, dans le cas d'un mouvement circulaire.** Que vaut l'excentricité dans ce cas? Calculer le rayon r_0 de cette trajectoire, en fonction de \mathcal{G} , μ , M_t et L .

Que peut-on dire du module de la vitesse de la particule fictive X ? Calculer sa valeur v_0 , en fonction des mêmes paramètres que r_0 .

15. Montrer que l'angle θ évolue avec le temps selon $\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t$, en explicitant la pulsation ω_0 . Montrer que $\omega_0^2 r_0^3 = \mathcal{G} M_t$. Comment s'appelle cette relation?
16. À partir du système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) utilisé ici, on peut aussi définir un système de coordonnées cartésiennes (x, y, z) , tel que $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$. Exprimer le mouvement $\{x(t), y(t)\}$ de la particule fictive en prenant comme origine des temps un instant où $y(0) = 0$ et $x(0) > 0$, afin de fixer θ_0 .

I.3. Cinématique de l'étoile en présence d'une planète

Maintenant que nous avons déterminé le mouvement de la particule fictive X , on revient à la situation considérée initialement, pour laquelle une étoile E de masse M et une planète P de masse m sont en interaction gravitationnelle. **On rappelle qu'on se place dans le cas d'un mouvement circulaire.**

17. En utilisant les résultats des questions 4. et 16., exprimer les lois du mouvement $x_P(t)$, $y_P(t)$, $x_E(t)$ et $y_E(t)$ des deux astres par rapport au centre de masse G supposé fixe. On posera $\beta = m/M < 1$.

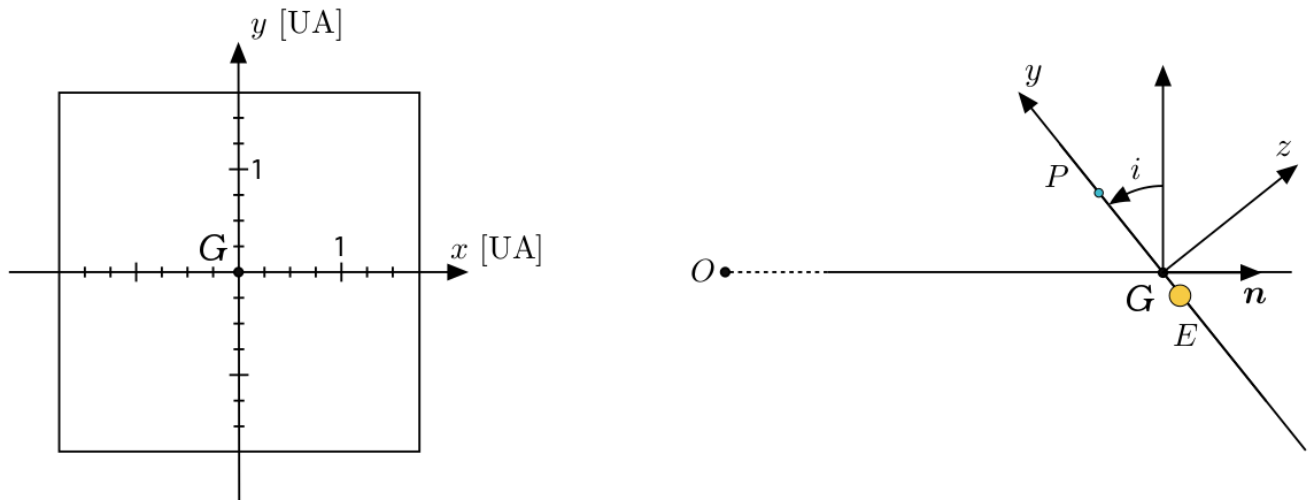


FIGURE 1 – *Gauche* : Représentation du plan de la trajectoire - *Droite* : Définition de l'angle i d'inclinaison du plan de la trajectoire par rapport à la ligne de visée. Le vecteur unitaire \vec{n} définit la ligne de visée vers le centre de masse G du système.

18. Reproduire le schéma de gauche de la figure 1 et y tracer les trajectoires de la particule fictive X et des deux astres E et P , dans le cas $r_0 = 1$ UA et $\beta = 1/3$. On représentera également les positions de X , E et P à un instant donné.
19. Le plan Gxy des trajectoires de E et P forme un angle i , compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, avec le plan du ciel (c'est-à-dire le plan perpendiculaire à la ligne de visée OG), comme indiqué sur le schéma de droite de la figure 1. Calculer la composante $v_{\parallel} = \vec{v}_E \cdot \vec{n}$ de la vitesse de l'étoile le long de la ligne de visée. Cette composante est appelée *vitesse radiale*.
20. Tracer l'allure de la vitesse radiale $v_{\parallel}(t)$ en fonction du temps, dont on notera K l'amplitude et T la période. C'est ce signal que l'on détecte par spectroscopie Doppler. Établir que

$$\frac{(m \sin i)^3}{(m + M)^2} = \frac{TK^3}{2\pi\mathcal{G}} \quad (6)$$

Ainsi, la mesure de l'amplitude K et de la période T de la variation de cette vitesse radiale en fonction du temps permet de contraindre la masse m de la planète en orbite autour de l'étoile, si l'on connaît la masse M de cette dernière et l'angle i de l'orbite planétaire.

21. Pour quelle inclinaison de l'orbite est-il plus facile de détecter la présence d'une planète en orbite autour de l'étoile ?

Vaut-il mieux que l'étoile soit de faible masse ou de grande masse ?

22. Simplifier le résultat de l'équation (6) dans le cas où la masse de la planète est très petite devant celle de l'étoile. Montrer alors qu'en l'absence de connaissance sur i , on ne peut qu'estimer une *masse minimale* $m_{>}$ de la planète, et donner son expression.

23. La figure 2, tirée de *Anglada-Escudé et al. (2016)* représente les mesures de la vitesse radiale de l'étoile *Proxima Centauri* effectuées à l'aide de deux instruments, HARPS et UVES, de l'Observatoire Européen Austral (ESO), au Chili. Estimer la période T et l'amplitude K du signal.

Sachant que la masse de l'étoile *Proxima Centauri* est de $2,4 \times 10^{29}$ kg, soit 0,12 fois la masse

solaire, en déduire une estimation (grossière) de la masse minimale de la planète *Proxima Centauri b*.

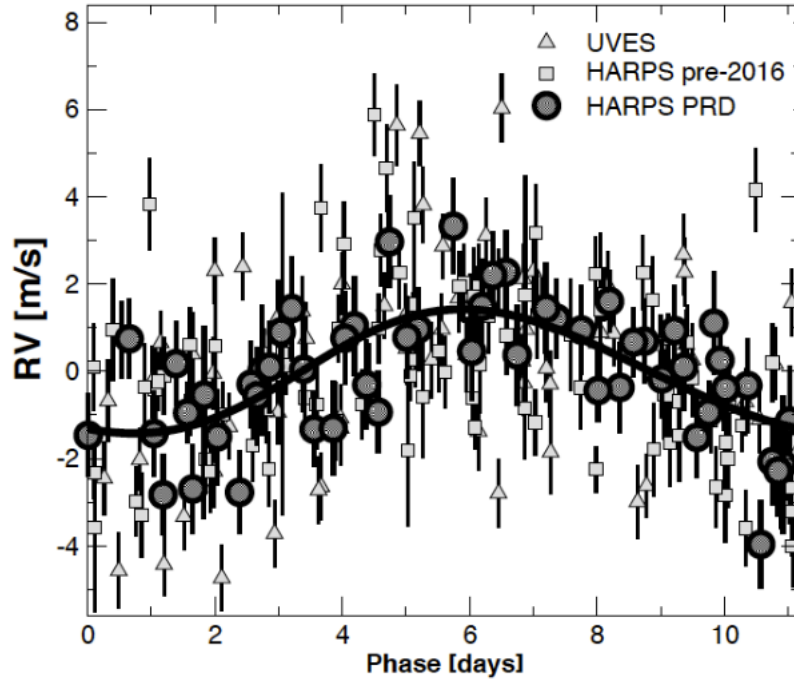


FIGURE 2 – Mesures de la vitesse radiale de l'étoile *Proxima Centauri* avec les instruments HARPS et UVES de l'ESO. Les données (représentées par les cercles, carrés et triangles) ont été prises au cours de 16 ans d'observations, et compilées pour faire ressortir, par ajustement (courbe en traits pleins), le signal périodique associé à la présence d'une planète (*Anglada-Escudé et al., 2016*).

Pour rappel, le décalage en longueur d'onde dû à l'effet Doppler s'écrit

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = -\frac{v_{\parallel}}{c} \quad (7)$$

dans sa version non relativiste. Les spectromètres sont de manière générale des instruments permettant de disperser, c'est-à-dire de séparer spatialement des vibrations lumineuses de différentes longueurs d'onde présentes dans un faisceau. Leur caractéristique fondamentale est le pouvoir de résolution

$$P_R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \quad (8)$$

où $\Delta\lambda$ est le plus petit écart entre longueurs d'onde qui puisse être distingué au voisinage de λ .

24. Étant donné un spectromètre dont le pouvoir de résolution est P_R , quelle doit être l'amplitude K de la vitesse radiale de l'étoile pour détecter la présence d'une exoplanète ?
25. En déduire que le pouvoir de résolution du spectromètre utilisé pour détecter la planète *Proxima Centauri b* (figure 2) doit satisfaire

$$P_R \geq \frac{c}{m_{>}} \left(\frac{M^2 T}{2\pi\mathcal{G}} \right)^{1/3} \quad (9)$$

Évaluer numériquement ce pouvoir de résolution minimal.

II. Modélisation de la chute d'un arbre

Rappel : Loi de Coulomb

Un solide en contact quasi-ponctuel sur un support subit de la part du support des actions de contact équivalentes à une force \vec{F} résultante que l'on peut décomposer en une composante normale \vec{N} et une composante tangentielle \vec{T} . En l'absence de glissement, on a $\|\vec{T}\| < f\|\vec{N}\|$ où f est le coefficient de frottement. En présence de glissement, la composante tangentielle \vec{T} est dirigée dans la direction opposée à celle du vecteur vitesse de glissement et on a $\|\vec{T}\| = f\|\vec{N}\|$.

On note $g = 9,81 \text{ m.s}^{-1}$ l'intensité du champ de pesanteur.

II.1. Initiation d'un apprenti bûcheron

Un bûcheron assimilé à un point matériel B de masse m souhaite abattre un arbre mort assimilé à un cylindre homogène de masse M avec $M > m$, de hauteur H et de section droite carrée de côté $2a$ représenté sur la figure 3.

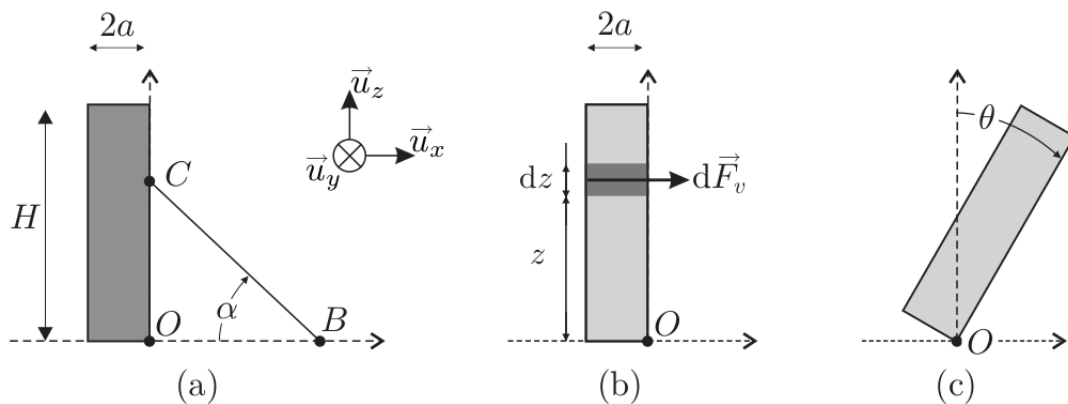


FIGURE 3 – Chute d'un arbre.

Il tire pour cela sur un câble fixé en C à l'arbre, de longueur $BC = \ell$ et de masse négligeable, afin de faire tourner l'arbre autour de l'axe (O, \vec{u}_y) dirigé par le vecteur $\vec{u}_y = \vec{u}_z \wedge \vec{u}_x$.

L'arbre étant mort, on néglige l'action de ses racines, de telle sorte qu'au moment où l'arbre commence à tourner, les actions de contact qu'il subit se limitent à une force $\vec{R}_1 = T_1\vec{u}_x + N_1\vec{u}_z$ appliquée au point O , et satisfaisant aux lois de Coulomb avec un coefficient de frottement f . De même les actions du sol sur le bûcheron sont décrites par une force $\vec{R}_2 = T_2\vec{u}_x + N_2\vec{u}_z$ appliquée au point B et satisfaisant aux lois de Coulomb avec le même coefficient de frottement f . Les composantes T_1 , N_1 , T_2 et N_2 ont des valeurs algébriques. Le câble est supposé tendu. On note \vec{F} la force exercée par le câble sur l'arbre au point C , supposée parallèle au câble, et F sa norme. Les angles sont orientés positivement dans le sens trigonométrique autour de (O, \vec{u}_y) et on note α l'angle (positif donc) entre \vec{BO} et \vec{BC} .

1. Le bûcheron est supposé ne pas glisser dans la situation initiale décrite par la figure 3(a). Exprimer N_2 et T_2 en fonction de F , α , m et g . En déduire l'expression de la valeur maximale F_{\max} de F en fonction de f , m , g et α .
2. L'arbre est supposé au repos dans la situation initiale décrite par la figure 3(a). Exprimer N_1 et T_1 en fonction de F , α , M et g . En déduire que pour $0 \leq F \leq F_{\max}$ le glissement n'est pas possible en O .
3. Exprimer le moment Γ_g du poids de l'arbre par rapport à l'axe (O, \vec{u}_y) dans la situation initiale décrite par la figure 3(a).
4. Soit Γ_B le moment par rapport à l'axe (O, \vec{u}_y) exercé par le bûcheron sur l'arbre via le câble. Exprimer Γ_B en fonction de F , ℓ et α .
En déduire la force F_{\min} alors nécessaire pour mettre l'arbre en rotation.

5. Montrer qu'il existe une valeur optimale α_m de l'angle α .
6. On donne $M = 10^3$ kg, $H = 20$ m, $a = 0,5$ m, $m = 10^2$ kg et $\ell = 25$ m. La figure 4 ci-dessous représente F_{\min} (trait fin continu) et F_{\max} dans le cas $f = 1$ (trait épais continu), ainsi que F_{\max} pour $f = 0,3$ (trait épais discontinu).
En temps normal $f = 1$. Le Bûcheron peut-il mettre l'arbre en rotation sans glisser ? Si oui quel angle α devrait-t-il choisir ? Sinon quelle solution s'offre à lui ?
En temps de pluie on obtient $f = 0,3$. Mêmes questions.

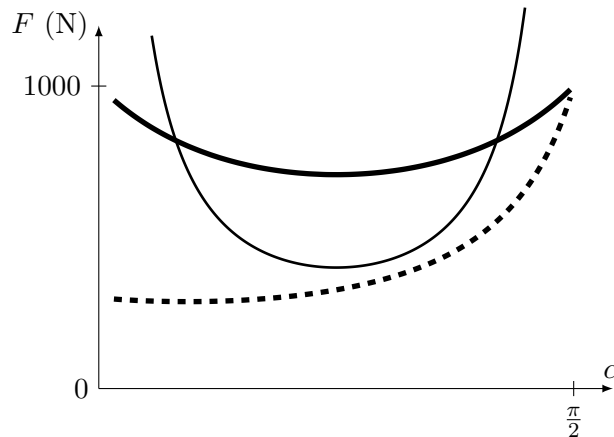


FIGURE 4 – Évolution en fonction de l'angle α de : F_{\min} (trait fin continu), F_{\max} dans le cas $f = 1$ (trait épais continu), ainsi que F_{\max} pour $f = 0,3$ (trait épais discontinu), pour

II.2. Déracinement d'un arbre par une bourrasque

Dans cette partie, on s'intéresse à la chute d'un arbre vivant, de hauteur H , sous l'effet d'un coup de vent violent. On néglige le rôle du poids de l'arbre : son mouvement résulte uniquement d'une compétition entre l'action du sol via les racines et l'action du vent.

Cette dernière est modélisée par une force élémentaire

$$d\vec{F}_v = C_x \rho_a U^2 dS \vec{u}_x$$

appliquée à chaque tranche du tronc d'arbre entre la hauteur z et la hauteur $z + dz$, pour un vent de vitesse $U \vec{u}_x$ ($U > 0$), en notant ρ_a la masse volumique de l'air, et C_x un coefficient d'aérodynamisme. Lorsque l'arbre est vertical, la section élémentaire dS transverse au vent de la tranche élémentaire dz est donc $dS = 2adz$.

7. L'arbre étant vertical, exprimer le moment total Γ_v des actions du vent par rapport à l'axe (O, \vec{u}_y) , en fonction de C_x , ρ_a , a , H et U .
8. Lorsque l'arbre commence à pencher, on repère son mouvement par l'angle θ représenté sur la figure 3(c). Le moment Γ_v varie en fonction de θ et on constate que $\Gamma_v(\theta)$ est proportionnel à $(\cos \theta)^n$ avec n entier. Proposer une valeur de l'entier n en justifiant votre réponse.

Dans toute la suite, on omet la dépendance de Γ_v en θ car celui-ci reste inférieur à 10° .

L'action du sol sur l'arbre est décrite par un moment résistant Γ_r par rapport à l'axe (O, \vec{u}_y) , qui met en jeu des phénomènes complexes comme l'élasticité des racines, un déracinement partiel, l'entraînement de la terre, etc.

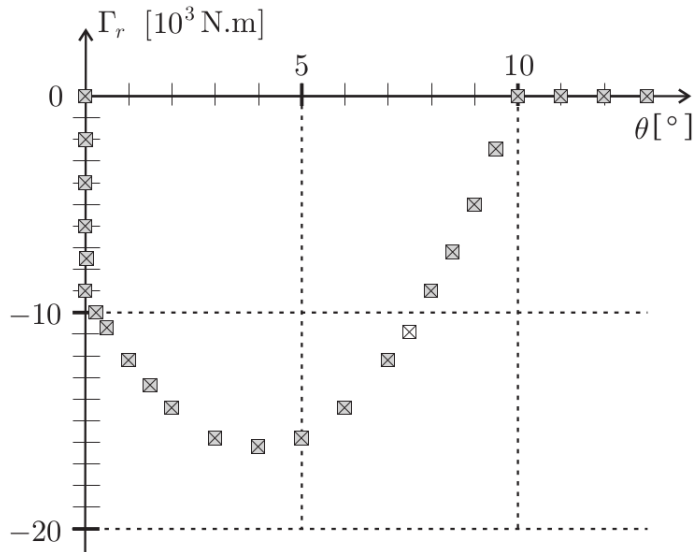


FIGURE 5 – Mesures du moment résistant lié au système racinaire en fonction de l'inclinaison θ du tronc. La taille des carrés représente l'incertitude de mesure.

Des essais de traction via un câble comme dans la partie précédente ont permis de relever les variations de Γ_r (en 10^3 N.m) en fonction de θ (en degrés) dans la figure 5 dans le domaine $\theta > 0$ auquel on se limite. Cette figure fait notamment apparaître une variation brutale au voisinage de $\theta = 0$ que l'on modélise par une discontinuité telle que $\Gamma_r(0) = 0$ et $\Gamma_r(0^+) = \Gamma_0$. Par ailleurs, au-delà d'un certain angle θ_c , l'arbre est totalement déraciné, de telle sorte que $\Gamma_r = 0$. Dans le domaine $0 < \theta \leq \theta_c$, on modélise les mesures expérimentales de Γ_r par un polynôme du deuxième degré de la forme :

$$\Gamma_r = \Gamma_0 \left(1 + 4 \frac{\theta}{\theta_c} - 5 \frac{\theta^2}{\theta_c^2} \right) \quad \text{avec} \quad \Gamma_0 < 0$$

9. Quelles valeurs doit-on donner aux paramètres θ_c et Γ_0 afin que ce polynôme rende compte des mesures de la figure 5 ?

Exprimer l'angle θ_m pour lequel Γ_r atteint sa valeur minimale et la valeur Γ_m de ce minimum. Vérifier la cohérence entre les résultats expérimentaux et les valeurs de $\frac{\theta_m}{\theta_c}$ et $\frac{\Gamma_m}{\Gamma_0}$ issues du modèle.

Du point de vue de sa dynamique, l'arbre est désormais assimilé à une barre mince en rotation autour de l'axe (O, \vec{u}_y) avec un moment d'inertie J , soumis au moment constant Γ_v et au moment $\Gamma_r(\theta)$ décrit par le modèle de l'équation ci-dessus. Initialement l'arbre est au repos en $\theta = 0$ en présence d'un vent de vitesse U indépendante du temps, et on s'interroge sur son évolution. On définit le paramètre $p = \frac{\Gamma_v}{|\Gamma_0|}$.

10. Discuter graphiquement selon la valeur de p la possibilité pour l'arbre de rester en équilibre en $\theta = 0$. Cet équilibre est-il stable ?

Discuter graphiquement selon la valeur de p l'existence et la stabilité de positions d'équilibre en $\theta_e > 0$.

Dans le cas où il existe une position d'équilibre stable inférieure à θ_c , expliquer sans calculs pourquoi on ne peut néanmoins pas être certain que l'arbre résiste au vent.

On se propose de trancher cette question. Les conditions initiales restent $\theta = 0$ et $\dot{\theta} = 0$.

11. Montrer que la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ de l'arbre vérifie une équation du type

$$\frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 = |\Gamma_0| \theta_c u P(u) \quad \text{avec} \quad u = \frac{\theta}{\theta_c}$$

où $P(u)$ est un trinôme du second degré pour la variable réduite u que l'on explicitera en fonction de l'unique paramètre $p = \frac{\Gamma_v}{|\Gamma_0|}$.

12. En déduire une approche graphique pour déterminer la nature bornée ou non du mouvement, et le cas échéant les bornes de ce mouvement.

À quelle condition sur p l'arbre sera-t-il certainement déraciné ? À quelle vitesse critique U_c cela correspond-il ? Pour l'application numérique on rappelle que $H = 20$ m et $a = 0,5$ m et on prendra $C_x = 0,5$.

13. On se place désormais dans le cas $p = \frac{4}{3}$. Déterminer numériquement les bornes du mouvement de l'arbre.

En réalité l'arbre finit par atteindre une position θ_∞ où il reste immobile. Interpréter qualitativement ce résultat.

* * * FIN DE L'ÉPREUVE * * *