

MÉCANIQUE

I. L'atome d'Hydrogène

I.1. Le modèle historique de Bohr

1. La force électrostatique \vec{F}_e appliquée par le noyau sur l'électron est centrale de centre O , donc d'après le théorème du moment cinétique pour l'électron dans \mathcal{R} galiléen en O fixe :

$$\left. \frac{d\vec{L}(O)}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{OM} \wedge \vec{F}_e = \vec{0} \quad \text{donc} \quad \vec{L}(O) = \vec{OM} \wedge m_e \vec{v} = \text{constante} = \vec{L}_0$$

Donc à tout instant \vec{OM} est orthogonal à \vec{L}_0 . Ainsi le mouvement est inscrit dans le plan orthogonal à \vec{L}_0 passant par O .

2. • Dans le plan du mouvement, la vitesse vaut $\vec{v} = r\dot{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$. Comme $\vec{OM} = r\vec{u}_r$, cela conduit à $\vec{L}_{M/\mathcal{R}}(O) = \vec{L}_0 = m_e r^2 \dot{\theta} \vec{u}_z$, qui est constant donc $\boxed{C = r^2 \dot{\theta}}$ est une constante, qu'on appelle la **constante des aires**.

• Si le mouvement est circulaire, alors $r = \text{constante}$, donc comme $C = \text{constante}$ on a aussi $\dot{\theta} = \text{constante}$. La vitesse angulaire est donc constante, tout comme la vitesse linéaire $v = r\dot{\theta}$. **Le mouvement est donc uniforme.**

Autre solution : par projection du "PFD" selon \vec{u}_r , cf réponse à la question suivante...

3. On applique le Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) à l'électron dans \mathcal{R} supposé galiléen. Le mouvement étant circulaire uniforme, on obtient simplement

$$-m_e \frac{v^2}{r} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{v = \frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 m_e r}}}$$

4. Posons $\boxed{K = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}}$, la force appliquée à l'électron est $\vec{F} = -\frac{K}{r^2} \vec{u}_r$. Pour un déplacement élémentaire $d\vec{OM}$ avec $\vec{OM} = r\vec{u}_r$, le travail élémentaire reçu par l'électron s'écrit

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{OM} = -\frac{K}{r^2} \vec{u}_r \cdot (dr\vec{u}_r + r d\vec{u}_r) = -\frac{K}{r^2} dr \quad \text{car} \quad \vec{u}_r \cdot d\vec{u}_r = 0$$

puisque \vec{u}_r est de norme constante. On en déduit

$$\boxed{\delta W = -dE_p(r) \quad \text{avec} \quad E_p(r) = -\frac{K}{r}}$$

La fonction E_p ne dépend que de la position de M donc la force est donc conservative.

5. D'après 3., on obtient

$$E_c = \frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} = \frac{K}{2r} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{E_c = -\frac{E_p}{2}}$$

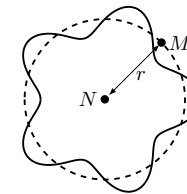
6. La vitesse étant $\vec{v} = v\vec{u}_\theta$ avec $v = r\dot{\theta}$ pour un mouvement circulaire, on obtient

$$\vec{L}_{M/\mathcal{R}}(O) = m_e r v \vec{u}_z.$$

De nouveau en réutilisant 3., on obtient $\boxed{L = e \sqrt{\frac{m_e r^3}{4\pi\epsilon_0}}}$.

7. La corde vibrant autour de la position de repos circulaire de rayon r doit nécessairement être continue donc périodique, comme représenté ci-contre. Cela implique que la circonférence est un nombre entier de fois la longueur d'onde (figure ci-contre pour $n = 5$) :

$$\boxed{2\pi r = n\lambda}$$



En injectant la définition de la longueur d'onde de De Broëglie on obtient

$$L = m_e r v = r \frac{h}{\lambda} = r h \frac{n}{2\pi r} \quad \text{d'où} \quad \boxed{L = n\hbar}$$

8. En réutilisant le résultat de la question 6., on en déduit

$$n\hbar = L = e \sqrt{\frac{m_e r_n}{4\pi\epsilon_0}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{r_n = a_B n^2} \quad \text{avec} \quad \boxed{a_B = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2}}$$

9. En réutilisant la résultat de la question 5., on en déduit¹

$$E_m = E_c + E_p = -\frac{E_p}{2} + E_p = \frac{E_p}{2} = -\frac{K}{2r} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

Combiné au résultat précédent cela conduit à une quantification de E_m :

$$\boxed{E_n = -\frac{Ry}{n^2}} \quad \text{avec} \quad \boxed{Ry = \frac{m_e e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2}}$$

10. • $r_1 = a_B \approx \frac{10^{-68}}{9 \times 10^9 \times 9 \times 10^{-31} \times 16^2 \times 10^{-40}} \approx \frac{1}{9 \times 9 \times 256} \times 10^{-6} \approx \frac{1}{25000} \times 10^{-6}$ d'où $r_1 = a_B \approx 0,4 \times 10^{-10}$ m.
 • Pour obtenir Ry en eV, il suffit de le diviser par e :

$$E_1 = -Ry \approx -\frac{9 \times 10^{-31} \times 16^3 \times 10^{-60} \times 9^2 \times 10^{18}}{4 \times 10^{-68}} \approx -9^3 \times 4 \times 256 \times 10^{-5} \quad \text{d'où} \quad \boxed{E_1 \approx -10 \text{ eV}}$$

Remarque : valeurs exactes $a_B \approx 0,529 \times 10^{-10}$ m et $E_1 \approx -13,6$ eV.

I.2. Spectre de raies de l'hydrogène

11. La longueur d'onde d'émission ou d'absorption vérifie

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda} = |E_n - E_m| = Ry \left| \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right| \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\lambda = \frac{hc}{Ry} \left| \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right|^{-1}}$$

La raie Balmer H_α correspond à $n = 2$ et $m = 3$ d'où²

$$\boxed{\lambda_\alpha = \frac{36hc}{5Ry}} \approx \frac{36 \times 6 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{5 \times 10 \times 16 \times 10^{-20}} \approx 1 \times 10^{-6} \text{ m}$$

Le résultat obtenu est dans l'infra-rouge donc invisible... compte tenu de la précision du calcul. La vraie valeur correspond à une **couleur rouge**.

1. Ce résultat est démontré dans le cas général dans le chapitre sur le problème newtonien.
 2. Valeur exacte $\lambda_\alpha \approx 0,6562 \mu\text{m}$.

12. Sachant que l'écart relatif est très faible ($\frac{\Delta\sigma_{\text{exp}}}{\sigma_m} \ll 1$), on peut obtenir l'écart en longueur d'onde par calcul différentiel³

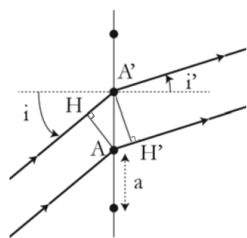
$$d\lambda = d\left(\frac{1}{\sigma}\right) = -\frac{d\sigma}{\sigma^2} \Rightarrow \Delta\lambda = \frac{\Delta\sigma_{\text{exp}}}{\sigma_m^2} \approx \frac{36}{15^2 \times 10^{10}} \approx 2 \times 10^{-11} \text{ m}.$$

Cela correspond à un écart relatif de $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_\alpha} \approx 0,002\%$, ce qui est très faible et nécessite un spectroscopie puissant.

Deuxième méthode avec développement limité à l'ordre 1 (équivalente mais moins rapide) :

$$\Delta\lambda = \frac{1}{\sigma_m - \Delta\sigma/2} - \frac{1}{\sigma_m + \Delta\sigma/2} = \frac{1}{\sigma_m} \left(\frac{1}{1 - \Delta\sigma/(2\sigma_m)} - \frac{1}{1 + \Delta\sigma/(2\sigma_m)} \right) \approx \frac{1}{\sigma_m} (1 + \Delta\sigma/(2\sigma_m) - 1 + \Delta\sigma/(2\sigma_m)) = \frac{\Delta\sigma_{\text{exp}}}{\sigma_m^2}.$$

- 13.



La différence de marche entre 2 rayons successifs passant par les fentes A et A' s'écrit (cf schéma ci-contre) :

$$\delta = HA' - AH' = a \sin i - a \sin i'.$$

On observe de la lumière dans la direction i'_p à condition que cette différence de marche soit un nombre entier p fois la longueur d'onde pour qu'il y ait interférence constructive entre tous les rayons issus de chaque fente allant dans cette direction, d'où

$$\sin i - \sin i'_p = p \frac{\lambda}{a}.$$

14. Pour l'ordre $p = 1$ avec $i = 0$ on a, de nouveau en utilisant la méthode différentielle :

$$\sin i_1 = -\frac{\lambda}{a} \Rightarrow d \sin i_1 = -\frac{d\lambda}{a} \Leftrightarrow \cos i_1 di_1 = -\frac{d\lambda}{a} \Rightarrow \Delta i_1 = \frac{\Delta\lambda}{a \cos i_1}.$$

Pour l'application numérique on suppose i_1 suffisamment petit pour que $\cos i_1 \approx 1$, ce qui est raisonnable puisque c'est l'ordre $p = 1$:

$$\Delta i_1 \approx 2 \times 10^{-11} \times 6 \times 10^5 \approx 1 \times 10^{-5} \text{ rad} \quad \text{d'où} \quad \Delta i_1 \approx 6 \times 10^{-4} \text{ }^\circ.$$

Cela confirme que l'écart est faible et qu'il sera difficile à mesurer avec un spectroscopie à réseau. D'où l'utilité de passer au Michelson.

15. Les surfaces d'interférences constructives sont les lieux du point M correspondant à une condition d'interférence constructive du type

$$\delta(M) = S_2M - S_1M = p\lambda \quad , \quad p \in \mathbb{N}.$$

Ce sont des hyperboloïdes⁴ de révolution d'axe de symétrie Oy , dont l'allure est représentée sur la figure ci-dessous. Sur l'écran qui est orthogonal à l'axe de révolution, les franges sont des **cercles concentriques de centre C**.

16. Les deux ondes ont la même amplitude E_0 :

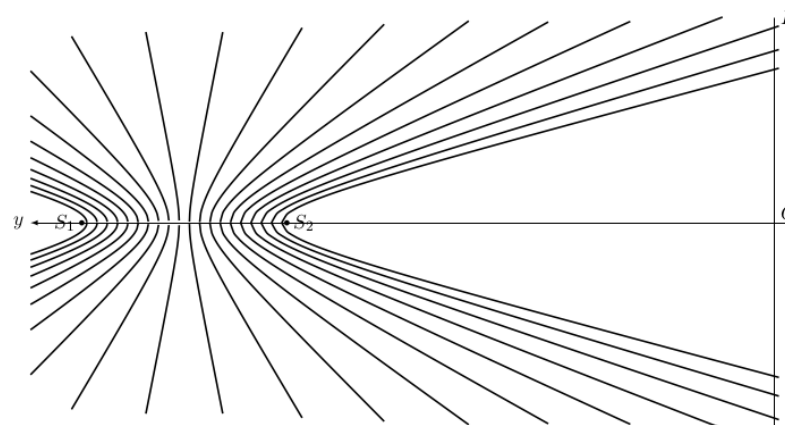
$$E_1(M, t) = E_0 \cos(\omega t - kS_1M) \quad \text{et} \quad E_2(M, t) = E_0 \cos(\omega t - kS_2M) \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

L'éclairement associé à chacune des sources individuelle est

$$I_0 = K \cdot \langle E_1^2(M, t) \rangle = K \cdot \langle E_2^2(M, t) \rangle = \frac{1}{2} K E_0^2.$$

3. Même principe que pour le calcul de propagation d'incertitude. On élimine le signe $-$ pour garder des écarts positifs.

4. Il s'agit de la définition bifocale des coniques hyperboles et ellipses non vue en géométrie.



La superposition des deux ondes synchrones donne lieu à des interférences :

$$\begin{aligned} I(M) &= K \cdot \langle (E_1(M, t) + E_2(M, t))^2 \rangle \\ &= K \cdot \langle E_1^2(M, t) \rangle + K \cdot \langle E_2^2(M, t) \rangle + 2K \cdot \langle E_1(M, t) \cdot E_2(M, t) \rangle \\ &= I_0 + I_0 + 4I_0 \langle \cos(\omega t - kS_1M) \cdot \cos(\omega t - kS_2M) \rangle \\ &= 2I_0 (1 + \langle \cos(2\omega t - k(S_1M + S_2M)) + \cos(\Delta\varphi(M)) \rangle) \quad \text{avec} \quad \Delta\varphi(M) = k(S_2M - S_1M) \end{aligned}$$

$$\text{d'où} \quad I(M) = 2I_0 (1 + \cos(\Delta\varphi(M))).$$

17. En C les rayons (S_1M) et (S_2M) sont confondus donc $S_2M - S_1M = -d$, d'où $\Delta\varphi(C) = -\frac{2\pi d}{\lambda}$.

18. On utilise les deux résultats précédents :

$$I(d) = I_1(d) + I_2(d) = 2I_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi d}{\lambda_1}\right) \right) + 2I_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi d}{\lambda_2}\right) \right) \quad \text{d'où}$$

$$I(d) = 4I_0 [1 + \cos(\pi d (\sigma_1 - \sigma_2)) \cdot \cos(\pi d (\sigma_1 + \sigma_2))] \quad \text{avec} \quad \sigma_1 = \frac{1}{\lambda_1} \quad \text{et} \quad \sigma_2 = \frac{1}{\lambda_2}.$$

Lorsqu'on augmente d , le facteur $\cos(\pi d (\sigma_1 + \sigma_2))$ génère des oscillations « rapides » entre franges sombres et brillantes. Ce faisant le facteur $\cos(\pi d (\sigma_1 - \sigma_2))$ varie lentement et joue le rôle de contraste entre les franges brillantes et sombres.

Le contraste devient nul et donne un brouillage lorsque

$$\cos(\pi d (\sigma_1 - \sigma_2)) = 0 \Leftrightarrow d_n = \frac{n + \frac{1}{2}}{\sigma_1 - \sigma_2} \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N}.$$

19. On en déduit l'écart entre deux positions de brouillage :

$$d_b = \frac{n + 1 + \frac{1}{2}}{\Delta\sigma_{\text{exp}}} - \frac{n + \frac{1}{2}}{\Delta\sigma_{\text{exp}}} \quad \text{d'où} \quad d_b = \frac{1}{\Delta\sigma_{\text{exp}}} \approx \frac{1}{36} \approx 3 \text{ cm}.$$

On peut donc mesurer l'écart entre les deux raies du doublet H_α par un déplacement d'environ 1,5 cm, ce qui est tout à fait accessible expérimentalement.

II. Mouvement d'une bille dans un bol hyperbolique

1. a) Dans le référentiel \mathcal{R} le moment cinétique associé à M s'écrit :

$$\vec{\sigma}(O) = m(r\vec{u}_r + z\vec{u}_z) \wedge (\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z) \quad \text{d'où} \quad \boxed{\vec{\sigma}(O) = -mzr\dot{\theta}\vec{u}_r + m(z\dot{r} - r\dot{z})\vec{u}_\theta + mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z}.$$

- b) En notant $m\vec{g}$ le poids de M et \vec{N} la réaction du support, normale à l'hyperboloïde, le Théorème du Moment Cinétique (TMC) dans \mathcal{R} galiléen au point O fixe s'écrit

$$\left. \frac{d\vec{\sigma}(O)}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{OM} \wedge m\vec{g} + \vec{OM} \wedge \vec{N}$$

Or les vecteurs \vec{OM} , $m\vec{g}$ et \vec{N} sont tous les 3 dans le plan vertical $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$, donc les moments sont dirigés selon \vec{u}_θ . Par projection selon \vec{u}_θ on obtient donc

$$\frac{d\sigma^{Oz}}{dt} = 0 \quad \text{donc} \quad \boxed{\sigma^{Oz} = mC} \quad \text{avec} \quad \boxed{C = r^2\dot{\theta}} \quad \text{la constante des aires.}$$

- c) Le projeté orthogonal P de M sur le plan horizontal $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ a par définition un mouvement plan, qui vérifie $C = r^2\dot{\theta} = \text{constante}$. Il vérifie donc la loi des aires : **la vitesse aréolaire $\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$ est constante, donc le rayon vecteur \vec{OP} balaie des aires égales pendant des durées égales.**

2. a) • La force de pesanteur est constante donc conservative car son travail élémentaire vérifie : $\delta W = m\vec{g} \cdot d\vec{OM} = -dE_p$ avec $E_p = -m\vec{g} \cdot \vec{OM} = mgz$ une fonction *énergie potentielle de pesanteur* dépendant explicitement uniquement de la position.
 • La force de réaction \vec{N} est normale au support lui-même immobile dans \mathcal{R} , donc en condition de contact la vitesse reste orthogonale à \vec{N} car tangente à la trajectoire. **Ainsi \vec{N} ne travaille pas.**
 • Ainsi, d'après le théorème de l'énergie mécanique dans \mathcal{R} galiléen, le système est conservatif c'est-à-dire que son énergie mécanique $E_m = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + E_p$ est constante.

b) Comme $\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z$, on obtient
$$E_m = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) + mgz.$$

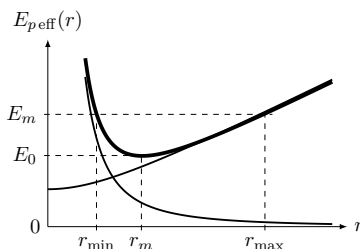
3. a) À tout instant le contact se traduit par $z^2 = a^2 + r^2$, donc dérivant on obtient $\boxed{z\dot{z} = r\dot{r}}$.
 b) • La condition précédente permet d'éliminer le degré de liberté z en remplaçant selon $z = \sqrt{a^2 + r^2}$ et $\dot{z} = \frac{r\dot{r}}{\sqrt{a^2 + r^2}}$.
 • La constante des aires permet d'éliminer le degré de liberté θ par $\dot{\theta} = \frac{C}{r^2}$.
 • On en déduit finalement $\boxed{E_m = \frac{1}{2}m_{\text{eff}}(r)\dot{r}^2 + E_{p_{\text{eff}}}(r) = \text{constante}}$ avec

$$\boxed{m_{\text{eff}}(r) = 1 + \frac{r^2}{a^2 + r^2}} \quad \text{et} \quad \boxed{E_{p_{\text{eff}}}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} + mg\sqrt{a^2 + r^2}}.$$

Il s'agit bien d'un système conservatif de masse effective $m_{\text{eff}}(r)$ évoluant dans une énergie potentielle effective $E_{p_{\text{eff}}}(r)$.

- c) Le graphe de $E_{p_{\text{eff}}}(r)$ s'obtient en additionnant deux termes positifs, l'un décroissant en $\frac{1}{r^2}$ de $+\infty$ à 0 et l'autre croissant hyperboliquement (asymptotiquement en r) de $mg a$ à $+\infty$ (courbes en traits fins ci-contre). Les deux contributions étant qui plus est convexes (de dérivée croissante), la somme l'est aussi, et $E_{p_{\text{eff}}}(r)$ admet nécessairement un unique minimum E_0 en r_m (courbe en trait plein). Ce minimum vérifie

$$\frac{dE_{p_{\text{eff}}}(r)}{dr}(r_m) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{r_m^4}{\sqrt{a^2 + r_m^2}} = \frac{C^2}{g}}.$$



- d) C'est un **puits de potentiel** donc la bille est dans un **état lié** : nécessairement $E_m \geq E_{p_{\text{eff}}}(r)$ donc le mouvement est **borné et oscillatoire selon r** entre r_{min} et r_{max} vérifiant $E_m = E_{p_{\text{eff}}}(r)$. La condition de contact $z^2 = a^2 + r^2$ implique que le mouvement est aussi **borné et oscillatoire selon z** . Au cours de ces oscillations, la bille **tourne toujours dans le même sens autour de l'axe Oz en respectant la loi des aires.**

4. a) Il s'agit d'un mouvement à $\theta = \text{constante}$, donc $\dot{\theta} = 0 \forall t$ et $\boxed{C = 0}$. Cela implique que la vitesse n'a jamais de composante orthoradiale, ce qui est aussi le cas de \vec{v}_0 **qui doit donc être dans le plan méridien du mouvement.**

Dans ces conditions il n'y a pas de potentiel centrifuge car $\frac{mC^2}{2r^2} = 0$, donc seulement l'énergie potentielle de pesanteur : $E_{p_{\text{eff}}}(r) = E_p(r) = mg\sqrt{a^2 + r^2}$. Ainsi le minimum est en $r = 0$, c'est-à-dire au fond du bol. On obtient l'équation des petits mouvements au voisinage du sommet en développant à l'ordre 2 l'énergie potentielle et l'énergie cinétique :

- $E_p(r) = E_p(0) + \frac{1}{2} \frac{d^2 E_p}{dr^2}(0) r^2 + o(r^2) = mga + \frac{1}{2} \kappa r^2 + o(r^2)$ avec $\kappa = \frac{d^2 E_p}{dr^2}(r=0) = \frac{mga^2}{(a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{mg}{a}$.
- $E_c = \frac{1}{2} m_{\text{eff}}(r) \dot{r}^2 = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + o(r^2)$.
- Ainsi l'équation de l'intégrale première de l'énergie se réduit à l'ordre 2 à

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \kappa r^2 = \text{constante.}$$

En la dérivant par rapport au temps

$$\dot{r} \cdot (m\ddot{r} + \kappa r) = 0 \quad \forall t,$$

on obtient l'équation du mouvement en simplifiant par \dot{r} :

$$\boxed{\ddot{r} + \omega_0^2 r = 0} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_0 = \frac{\kappa}{m} = \sqrt{\frac{g}{a}}}.$$

C'est l'équation du mouvement oscillatoire d'un oscillateur harmonique de pulsation propre ω_0 .

- b) • Un mouvement circulaire correspond à $r = \text{constante}$, donc $\dot{r} = 0$ et donc $\dot{z} = 0$ d'après la relation trouvée en **3.a)**. C'est donc nécessairement un cercle horizontal.
 • Par ailleurs **la vitesse est donc orthoradiale à tout instant**, $\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$, et on a donc $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_\theta = r_0\dot{\theta}(0)\vec{u}_\theta$, et $\boxed{C = r_0 v_0}$.
 • Comme il s'agit d'un mouvement à $r = r_0 = \text{constante}$, **l'énergie mécanique est forcément minimale** (sinon r oscillerait entre deux valeurs extrêmes). Donc $r_0 = r_m$ qui vérifie la condition trouvée en **3.c)** :

$$\frac{r_0^4}{\sqrt{a^2 + r_0^2}} = \frac{C^2}{g} = \frac{r_0^2 v_0^2}{g} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{v_0^2 = \frac{g r_0^2}{\sqrt{a^2 + r_0^2}}} \quad \text{avec} \quad v_0 > 0 \text{ ou } < 0.$$

5. Le vecteur accélération est toujours orienté vers la concavité de la trajectoire, donc ici vers l'intérieur de la surface. Donc $a_n = \vec{a} \cdot \vec{u}_n > 0$. Par projection du Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) selon \vec{u}_n on obtient $R - mg \cos \alpha = ma_n > 0$, où $\alpha = (\vec{u}_z, \vec{u}_n)$. Comme $\cos \alpha > 0$, on en déduit $R = ma_n + mg \cos \alpha > ma_n > 0$. Donc R ne s'annule jamais, donc le contact ne peut être rompu.
 6. Les frottements ne peuvent être négligés sur le long terme. Ils diminuent l'énergie mécanique, qui se rapproche du minimum $E_{p_{\text{eff}}}(r_m)$: $\boxed{r \rightarrow r_m}$ qui vérifie

$$\frac{r_m^4}{\sqrt{a^2 + r_m^2}} = \frac{C^2}{g}.$$

Mais en même temps les frottements exercent un moment selon z qui réduit le moment cinétique σ^{Oz} en valeur absolue. Donc $|C| = r^2|\dot{\theta}|$ décroît aussi au cours du temps, ce qui fait s'affaïssir le terme de potentiel centrifuge $\frac{mC^2}{2r^2}$ au profit du terme de pesanteur qui persiste. A long terme, on a donc $\boxed{C \rightarrow 0}$, donc $\boxed{r \rightarrow r_m \rightarrow 0}$. **La bille finit donc sa course au fond du bol.**

5. Comme $r^2\dot{\theta} = \text{constante}$ on en déduit aussi que le mouvement circulaire est nécessairement uniforme.