

# ONDES ET MÉCANIQUE

## CALCULATRICES INTERDITES

On effectuera toutes les applications numériques à la main en ordre de grandeur, donc avec au plus un seul chiffre significatif.

### I. L'atome d'Hydrogène

Données :

- Charge électrique élémentaire :  $e = 1,6022 \times 10^{-19}$  C
- Masse de l'électron :  $m_e = 9,1094 \times 10^{-31}$  kg
- Permittivité diélectrique du vide :  $\varepsilon_0$ , telle que  $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8,9875 \times 10^9$  m.F<sup>-1</sup>
- Constante de Planck :  $h = 6,6261 \times 10^{-34}$  J.s
- Constante de Planck réduite :  $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,0546 \times 10^{-34}$  J.s
- Vitesse de la lumière dans le vide :  $c = 2,9979 \times 10^8$  m.s<sup>-1</sup>

#### I.1. Le modèle historique de Bohr

Dans le modèle planétaire de Bohr de l'atome d'hydrogène, l'électron de charge  $-e$  (vu comme ponctuel en  $M$ ) tourne autour de son proton de charge  $e$  (lui aussi ponctuel et supposé immobile en  $O$ ), en décrivant une orbite circulaire de rayon  $r = OM$  (figure 1). On note  $\vec{u}_z$  le vecteur unitaire normal au plan de l'orbite. L'électron est repéré par ses coordonnées polaires  $(r, \theta)$  comme indiqué sur la figure 1 et  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  est la base locale correspondante. On néglige l'interaction gravitationnelle entre l'électron et le proton.

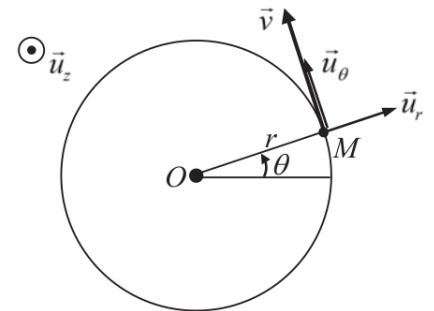


FIGURE 1

1. Justifier que le mouvement de l'électron est nécessairement plan.
2. Dans toute la suite on s'intéresse exclusivement aux orbites circulaires. Montrer que ces mouvements sont nécessairement uniformes.
3. Établir l'expression de la norme  $v$  de la vitesse de l'électron en fonction entre autres du rayon  $r$  de l'orbite.
4. Démontrer que la force électrostatique exercée par le proton sur l'électron est conservative, et établir l'expression de son énergie potentielle électrostatique  $E_p$ .
5. Montrer que l'énergie cinétique  $E_c$  de l'électron vérifie :  $E_c = -\frac{E_p}{2}$ .
6. Établir l'expression de la norme  $L$  du moment cinétique en  $O$  de l'électron, en fonction de  $r$ ,  $m_e$ ,  $e$ , et  $\varepsilon_0$ .

En 1913, Bohr a postulé que  $L$  est un multiple entier de  $\hbar$  en posant  $L = n\hbar$ , où  $n$  est un entier naturel (strictement positif) et où  $\hbar$  est la constante de Planck réduite. Pour de tels états du modèle de Bohr dits stationnaires, l'électron en mouvement circulaire uniforme ne rayonne pas d'énergie, bien qu'accélééré.

La physique quantique permet de comprendre l'origine de cette propriété de quantification du moment cinétique. L'électron est assimilé à une onde, de longueur d'onde  $\lambda = \frac{h}{mv}$  (longueur d'onde de De Brøglie,  $h$  est la constante de Planck) et de fonction d'onde  $s(\theta, t)$ . On interprète les états possibles de l'électron comme des modes propres, c'est-à-dire des ondes stationnaires sur une orbite de rayon  $r$ . On a donc

$s(\theta, t) = f(t).g(\theta)$  avec  $f$  et  $g$  des fonctions harmoniques<sup>1</sup> donc périodiques, et la condition aux limites suivante :  $g(\theta + 2\pi) = g(\theta)$ .

7. En assimilant l'électron à une corde vibrant autour de l'orbite de rayon  $r$ , faire un schéma représentant cette corde autour du proton. En déduire une condition de quantification vérifiée par  $\lambda$ , c'est-à-dire une relation avec un entier naturel  $n$ .  
Montrer que cela conduit à la relation  $L = n\hbar$ .
8. En déduire que le rayon de l'orbite est lui-même quantifié sous la forme  $r_n = a_B.n^2$ , avec  $a_B$  le rayon de Bohr, qu'on exprimera en fonction de  $m_e$ ,  $e$ ,  $\varepsilon_0$  et  $\hbar$ .
9. En déduire que l'énergie mécanique de l'électron est elle aussi quantifiée et vaut  $E_n = -\frac{R_y}{n^2}$ , avec  $R_y$  la constante énergétique de Rydberg, dont on donnera l'expression en fonction de  $m_e$ ,  $e$ ,  $\varepsilon_0$  et  $\hbar$ .
10. Évaluer la taille d'un atome d'hydrogène dans l'état fondamental, c'est-à-dire pour  $n = 1$ .  
Évaluer son énergie en électron-volts ( $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$ ).

## 1.2. Spectre de raies de l'hydrogène

Les niveaux d'énergie étant quantifiés, les transitions entre états d'un électron correspondent à des absorptions ou émissions de photons de longueurs d'onde elles aussi quantifiées, d'où un spectre de raie. On rappelle que d'après la formule d'Einstein, l'énergie  $E$  d'un photon s'écrit en fonction de sa fréquence  $\nu$  ainsi :  $E = h\nu$ .

11. En utilisant les résultats précédents, exprimer la longueur d'onde  $\lambda$  d'un photon correspondant à une transition entre un niveau  $n$  et un niveau  $m$ .  
Évaluer la longueur d'onde de la raie Balmer  $H_\alpha$ , qui correspond au passage entre les niveaux  $n = 2$  et  $m = 3$ . De quelle couleur est cette lumière ?

*Le modèle de Bohr fut un premier succès dans la prévision du spectre d'émission de l'hydrogène. Mais les progrès de la spectroscopie ont rapidement conduit à observer que certaines raies vues initialement comme monochromatiques présentaient en fait une structure fine sous la forme de multiplets de raies voisines. C'est le cas, par exemple, de la raie  $H_\alpha$  qui fut observée comme un doublet par Michelson et Morley dès 1887, mais qui, plus tard, se révéla être formée de raies plus nombreuses.*

*Immédiatement après l'annonce du résultat négatif de leur expérience consacrée à confirmer l'existence de l'éther luminifère, Michelson et Morley mentionnèrent dans une publication l'observation de la raie  $H_\alpha$  comme un doublet de nombre d'onde moyen  $\sigma_m = 15237,40 \text{ cm}^{-1}$  et d'écart spectral  $\Delta\sigma_{\text{exp}} = 0,360 \text{ cm}^{-1}$  (valeurs expérimentales de 1887).*

12. Sachant que le nombre d'onde est défini par  $\sigma = \frac{1}{\lambda}$ , évaluer l'écart en longueur d'onde  $\Delta\lambda$  mesuré par Michelson et Morley.

### Utilisation d'un réseau

Pour mesurer ce doublet et le résoudre (le séparer), on se propose d'utiliser pour instrument dispersif un réseau, c'est-à-dire une plaque sur laquelle a été gravée une succession d'un très grand nombre de fentes rectilignes équidistantes appelées « traits du réseau ». Chacune de ces fentes très fines, espacées d'un pas  $a$ , diffracte la lumière dans toutes les directions, puis les ondes issues de fentes distinctes interfèrent de l'autre côté. On considère une onde incidente plane (rayons parallèles) de longueur d'onde  $\lambda$  et d'angle d'incidence  $i$ , et on observe les interférences très loin du réseau dans la direction  $i'$ .

13. Montrer que les directions particulières  $i'_p$  où l'on percevra de la lumière satisfont la relation

$$\sin i'_p - \sin i = p \frac{\lambda}{a} \quad \text{avec } p \in \mathbb{Z}.$$

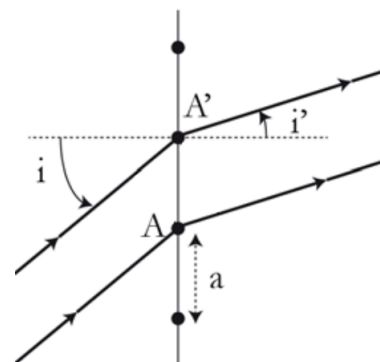


FIGURE 2 – Rayons incidents (angle  $i$ ) et émergents (angle  $i'$ ) au niveau de deux fentes voisines d'un réseau.

1. En réalité elles sont à valeurs complexes.

Ainsi on peut observer de la lumière dans la direction de l'angle  $i'_p$  (appelée « ordre  $p$  »), qui dépend de  $\lambda$ , ce qui permet de décomposer une lumière polychromatique et observer son spectre.

14. On considère une incidence normale, c'est-à-dire  $i = 0$ , et on exploite l'ordre de diffraction  $p = 1$ . Exprimer la variation  $\Delta i'_1$  de l'angle  $i'_1$  correspondant à l'écart  $\Delta \lambda$  du doublet  $H_\alpha$  évalué précédemment.

Évaluer  $\Delta i'_1$  en degrés dans le cas d'un réseau à  $N = \frac{1}{a} = 600 \text{ traits.mm}^{-1}$ . Pourra-t-on distinguer facilement les 2 raies? Comment pourrait-on utiliser le réseau de façon plus efficace?

### Utilisation d'un interféromètre de Michelson

Les moyens spectroscopiques conventionnels (spectroscopie à prisme ou à réseau) peuvent se révéler insuffisants quand il s'agit de résoudre un doublet à très faible écart spectral. On peut alors avoir recours à des méthodes interférométriques. Il est question dans cette partie de l'utilisation de l'interféromètre de Michelson.

Le schéma de principe d'un interféromètre de Michelson réglé en lame d'air est présenté en figure 3. On note  $Ox$  et  $Oy$  deux axes perpendiculaires définissant les directions des deux « bras » de l'interféromètre.  $S$  est une source lumineuse ponctuelle située sur  $Ox$ .  $M_1$  et  $M_2$  sont deux miroirs plans parfaitement réfléchissants, disposés perpendiculairement à  $Ox$  en  $H_1$  et respectivement à  $Oy$  en  $H_2$ . Le trait incliné à  $45^\circ$ , noté  $L_s$ , schématise un groupe de deux lames semi-réfléchissantes à faces parallèles. Ce groupe est supposé n'introduire aucune différence de marche sur les trajets lumineux.  $L_p$  désigne une lentille mince convergente placée à la sortie de l'interféromètre de manière à ce que son axe optique soit confondu avec l'axe  $Oy$ . Un écran  $E$  est placé dans le plan focal image de  $L_p$ . On note  $C$  le foyer image de  $L_p$ .

On ne raisonnera pas directement sur ce schéma. Ce dispositif est théoriquement équivalent à un système de deux sources secondaires ponctuelles et synchrones  $S_1$  et  $S_2$  en phase, alignées sur l'axe  $Oy$  et distantes de  $d = 2(OH_1 - OH_2)$  (figure 4). On peut donc modifier la distance  $d$  en déplaçant le miroir  $M_1$  selon  $Ox$ .

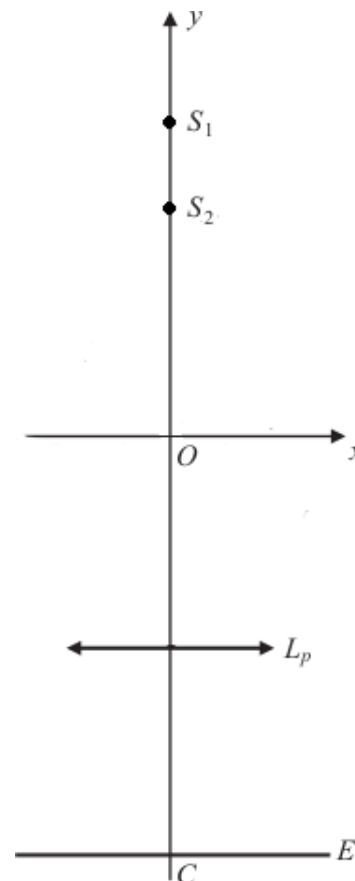
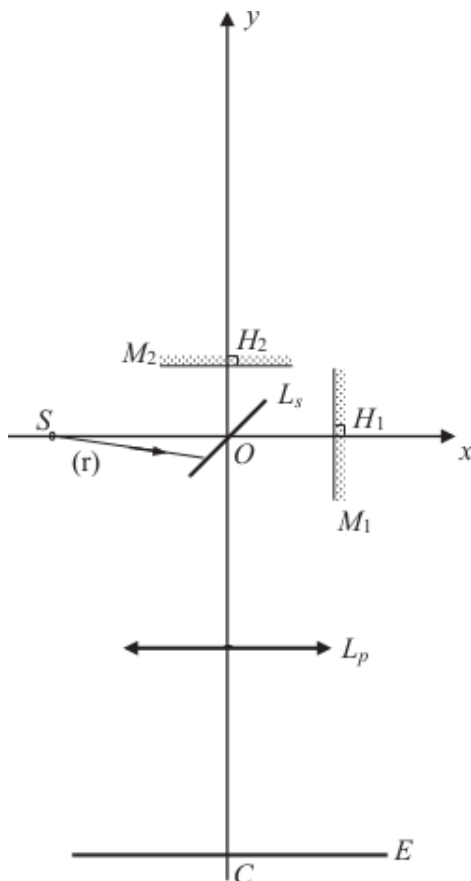


FIGURE 3 – Schéma de l'interféromètre de Michelson réglé en « lame d'air ».

FIGURE 4 – Schéma équivalent à 2 sources ponctuelles secondaires.

On considère d'abord que  $S$  est une source monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$ , donc  $S_1$  et  $S_2$  le sont aussi. On raisonne dans toute la suite en faisant abstraction de la lentille  $L_p$ , dont le rôle n'est pas fondamental ici (former l'image des franges située à l'infini au niveau du plan focal).

15. Exprimer la condition d'interférence constructive en un point  $M$  quelconque.  
Représenter l'allure dans tout l'espace des surfaces d'interférences constructives entre les ondes sphériques issues de  $S_1$  et de  $S_2$ . Quelle est la nature de ces surfaces? Quelle sera la forme des franges lumineuses sur l'écran  $E$ ?
16. Établir l'expression de l'éclairement  $I$  en  $M$  en fonction du déphasage  $\Delta\varphi(M)$  entre les deux ondes et de l'éclairement  $I_0$  que produirait chacune des sources  $S_1$  et  $S_2$  considérée seule ( $S_1$  et  $S_2$  sont de même intensité). On rappelle que l'éclairement est proportionnel à la moyenne quadratique du champ électrique :  $I = K \cdot \langle E^2(M, t) \rangle$ .
17. On se place sur l'écran au point  $C$  (sans considérer l'effet de la lentille). Exprimer  $\Delta\varphi$  en  $C$  en fonction de  $d$  et de  $\lambda$ .

En réalité la source  $S$  émet un doublet  $H_\alpha$ , donc deux ondes de longueurs d'ondes distinctes  $\lambda_1$  et  $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda$  très proches, dont les intensités individuelles  $I_{01}$  et  $I_{02}$  peuvent être considérées égales :  $I_{01} = I_{02} = I_0$ . Il en résulte une superposition des éclairements dus à chacune de ces longueurs d'ondes, car les ondes non synchrones n'interfèrent pas :  $I(d) = I_1(d) + I_2(d)$  au point  $C$ .

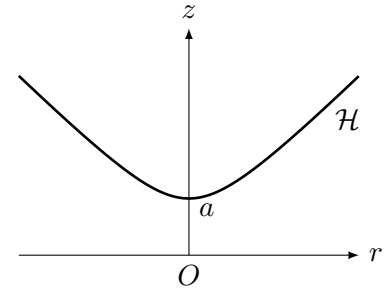
On positionne alors  $M_1$  de sorte que  $d = 0$  puis on le déplace lentement et régulièrement vers la droite pour augmenter  $d$ . Ce faisant on observe au point  $C$  que l'éclairement  $I(d)$  oscille entre frange sombre et frange brillante. Toutefois à mesure que  $d$  augmente, le contraste entre ces alternances s'affaiblit, jusqu'à atteindre un *brouillage* des franges c'est-à-dire un contraste nul (aucune variation d'intensité) au voisinage de la distance  $d = d_1$ . Si l'on continue à augmenter  $d$ , les franges redeviennent contrastées, puis se brouillent de nouveau au voisinage de  $d_2$ , et ainsi de suite si l'on continue à augmenter  $d$ .

18. Ré-exprimer  $I(d)$  en faisant apparaître un produit de deux cosinus. Puis interpréter l'existence de brouillages périodiques.
19. Exprimer l'écart de distance  $d_b = d_{n+1} - d_n$  qui sépare deux situations de brouillage consécutives, en fonction de l'écart spectral  $\Delta\sigma_{\text{exp}} = \sigma_1 - \sigma_2$  mesuré par Michelson et Morley pour le doublet  $H_\alpha$ .  
Évaluer numériquement cette distance  $d_b$  ( $\Delta\sigma_{\text{exp}} = 0,360 \text{ cm}^{-1}$ ) qui sera le double du déplacement du miroir  $M_1$ .

## II. Mouvement d'une bille dans un bol hyperbolique

On désire étudier les mouvements possibles d'une bille assimilée à un point matériel  $M$ , de masse  $m$ , sous l'action du champ de pesanteur  $\vec{g} = -g\vec{u}_z$ , à l'intérieur d'un bol que l'on suppose solidaire d'un référentiel terrestre  $\mathcal{R} = (O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  supposé galiléen.

La surface du bol est une hyperboloïde de révolution  $\mathcal{H}$ , d'axe vertical ascendant  $Oz$ , dont l'équation en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  est  $z = \sqrt{a^2 + r^2}$ , avec  $a > 0$  (cf figure ci-contre). Cette surface étant parfaitement lisse, le point matériel  $M$  glisse sans frottement sur  $\mathcal{H}$ . Compte tenu de la symétrie du problème, on utilisera les coordonnées cylindriques de  $M$ , et la base locale cylindrique  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ . On suppose la liaison unilatérale, c'est-à-dire que les coordonnées  $r$  et  $z$  de  $M$  satisfont à l'inégalité  $z \geq \sqrt{a^2 + r^2}$ , avec égalité s'il y a contact. Sauf mention contraire, on suppose que le contact est réalisé. À l'instant initial, la bille est lancée en  $r_0$  avec une vitesse  $\vec{v}_0$  de norme  $v_0$ .



### 1. Moment cinétique

- Calculer  $\vec{\sigma}(O)$ , le moment cinétique de  $M$  en  $O$ , dans la base cylindrique.
- Montrer que la composante verticale de  $\vec{\sigma}(0)$  est conservée au cours de ce mouvement. On introduira la constante des aires  $C$ .
- Énoncer la « loi des aires ». Quel point vérifie cette loi dans le cas présent ?

### 2. Energie

- Montrer que le système est conservatif.
- Calculer son énergie mécanique en fonction des coordonnées cylindriques.

### 3. Discussion générale du mouvement

- Établir la relation entre vitesse verticale  $\dot{z}$  et vitesse radiale  $\dot{r}$  sous l'hypothèse du contact avec le bol.
- Montrer que le système est équivalent à un système conservatif à un degré de liberté, de masse effective  $m_{\text{eff}}(r)$ , évoluant dans une énergie potentielle effective  $E_{p_{\text{eff}}}(r)$ . On explicitera les fonctions  $m_{\text{eff}}(r)$  et  $E_{p_{\text{eff}}}(r)$ .
- Montrer que la fonction admet un minimum  $r_m$ , qu'on ne cherchera pas à expliciter. Représenter l'allure de  $E_{p_{\text{eff}}}(r)$ . Trouver une relation entre  $r_m$ ,  $C$ ,  $a$  et  $g$ .
- Discuter la nature générale du mouvement de  $M$ . Faire un schéma.

### 4. Etude de quelques mouvements particuliers

- A quelle condition sur  $C$ , puis sur  $\vec{v}_0$ , la trajectoire est-elle une hyperbole méridienne, c'est-à-dire une trajectoire plane passant par l'axe  $Oz$  ?  
Établir la pulsation des petites oscillations autour du sommet de l'hyperbole.
- Déterminer la vitesse  $\vec{v}_0$  (direction et norme) à communiquer initialement, en fonction de  $r_0$ ,  $g$ , et  $a$ , pour que la trajectoire de  $M$  sur  $\mathcal{H}$  soit un cercle horizontal.

### 5. Réalisation du contact

On note  $\vec{u}_n$  la normale rentrante à la surface en  $M$ . La réaction du support s'écrit alors  $\vec{R} = R\vec{u}_n$ . Que dire du signe de  $a_n = \vec{a} \cdot \vec{u}_n$ , l'accélération selon  $\vec{u}_n$  ? En déduire s'il est possible que le contact soit rompu.

- L'expérience montre que la bille se stabilise finalement au fond du bol, quelles que soient les conditions initiales du mouvement. Expliquer pourquoi, à l'aide du graphe de  $E_{p_{\text{eff}}}(r)$ .

\* \* \* FIN DE L'ÉPREUVE \* \* \*