

Concours blanc n°1: Correction

I Capture d'empreintes digitales par réflexion totale frustrée

I.1 Conception du système optique

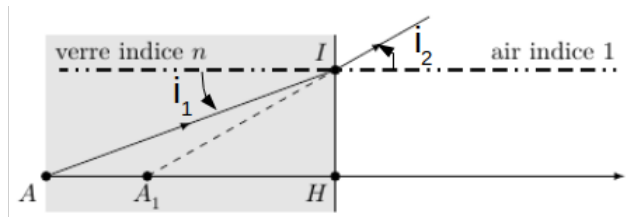


FIGURE 1

Q1. Figure 1 $n \sin i_1 = \sin i_2$ soit dans les conditions de Gauss (ces angles sont petits) : $\boxed{ni_1 \approx i_2}$.

Q2. Dans les triangles AIH et A_1IH , on peut écrire les relation :

$$i_1 \approx \tan i_1 = \frac{\overline{IH}}{\overline{AH}}$$

$$i_2 \approx \tan i_2 = \frac{\overline{IH}}{\overline{A_1H}}$$

soit dans la relation de Descartes :

$$n \frac{\overline{IH}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{IH}}{\overline{A_1H}}$$

soit :

$$\boxed{\overline{HA_1} = \frac{1}{n} \overline{HA}} \quad (1)$$

Q3. On a :

$$\gamma = \frac{p'}{p}$$

$$D_1 = -p + p'$$

Il vient :

$$\boxed{p = \frac{D_1}{\gamma - 1}} \text{ et } \boxed{p' = \frac{\gamma D_1}{\gamma - 1}} \quad (2)$$

De la relation de conjugaison $\frac{1}{f'} = \frac{1}{p'} - \frac{1}{p}$ donc $f' = \frac{pp'}{p-p'}$, il vient (on pourra remarquer que $p - p' = -D_1$) :

$$\boxed{f' = -D_1 \frac{\gamma}{(\gamma - 1)^2}} \quad (3)$$

Q4. Ici $p' > 0$ (image réelle) et $p < 0$ (objet réel) donc $\gamma < 0$. Le résultat précédent permet d'écrire :

$$\frac{D_1}{f'} = -\frac{(\gamma - 1)^2}{\gamma} \underbrace{\quad}_{\text{notation}} g(\gamma)$$

On peut étudier la fonction g . Sa dérivée vaut $g'(\gamma) = -1 + \frac{1}{\gamma^2}$ et elle s'annule en $\gamma = -1$ en passant de valeurs négatives à des valeurs positives : c'est donc bien un minimum. On trouve :

$$\frac{D_1}{f'_{\min}} = 4$$

soit $\boxed{D_1 \geq 4f'}$: on retrouve la condition de projection.

Q5. Des questions précédentes il vient :

$$D_1 = \frac{1}{n} \overline{AH} + \overline{HA} + \overline{AA_1} = \left(\frac{1}{n} - 1\right) L + D$$

donc :

$$f' = \frac{\gamma}{(\gamma - 1)^2} \left(\left(\frac{1}{n} - 1\right) L + D \right) = 2\text{cm} \quad (4)$$

Q6. $\boxed{f' = 2\text{cm}}$ et $\boxed{p' = 6\text{cm}}$

Q7. L'étude précédente montre que le rapport $\frac{D_1}{f'}$ doit augmenter lorsqu'on augmente $|\gamma|$ (avec $|\gamma| \geq 1$), il faut donc diminuer la distance focale. En pratique, on doit alors augmenter la courbure de la lentille ce qui va augmenter les aberrations.

I.2 Résolution de l'image

Q8. L'écart entre l'image de deux crêtes sur l'écran est γa . Il faut donc que $|\gamma|a \geq l_c$ soit une taille de pixel inférieure à $200\mu\text{m}$. Il n'est pas nécessaire de prendre une taille trop petite. On pourra prendre par exemple une taille de $50\mu\text{m}$ pour avoir un peu de marge.

Q9. En utilisant les relations de conjugaison, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{p'} - \frac{1}{p} &= \frac{1}{p' - e'} - \frac{1}{p - e} \\ \frac{1}{p'} - \frac{1}{p} &= \frac{1}{p'} \frac{1}{1 - \frac{e'}{p'}} - \frac{1}{p} \frac{1}{1 - \frac{e}{p}} \\ \frac{1}{p'} - \frac{1}{p} &= \frac{1}{p'} \left(1 + \frac{e'}{p'}\right) - \frac{1}{p} \left(1 + \frac{e}{p}\right) \\ 0 &= \frac{e'}{p'^2} - \frac{e}{p^2} \\ e' &= \gamma^2 e \end{aligned}$$

Q10. On peut utiliser le théorème de Thalès dans les triangles s'appuyant sur la lentille et l'écran et sommet commun M'_2 :

$$\frac{\phi}{d} = \frac{e'}{p' - e'} \approx \frac{e'}{p'} = \frac{\gamma^2 e}{\gamma p}$$

soit : $\boxed{\phi = d\gamma \frac{e}{p}}$

Q11. On veut donc que $\phi > \gamma a$ soit $\frac{d}{p} > \frac{a}{e} = 3$. On peut remarquer que l'angle θ sous lequel arrivent les rayons les plus inclinés est donné par $\tan \theta = \frac{d}{2p} > \frac{3}{2}$, ce qui est contraire à l'approximation des petits angles donc au respect des conditions de Gauss.

I.3 Réflexion totale

Q12. Figure 2 Les lois de Snell-Descartes décrivent les rayons issus d'un d'un rayon incident provenant d'un milieu transparent d'indice n_1 lorsqu'il aborde le dioptre qui le sépare d'un autre milieu

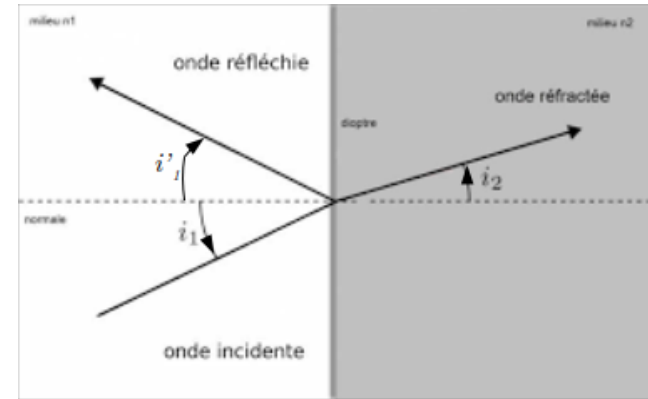


FIGURE 2 – Lois de Snell Descartes

transparent d'indice n_2 . Un rayon incident, se propageant dans le plan d'incidence (défini par le rayon lui-même et la normale au dioptre au point d'incidence I) donne naissance éventuellement à un rayon réfléchi et un rayon transmis, tous deux se propageant dans le même plan d'incidence.

Dans ce plan, l'angle entre la normale et le rayon réfléchi est donnée selon $i'_1 = -i_1$ et l'angle entre la normale et le rayon réfracté (transmis) selon $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ respectivement.

Q13. Lorsqu'un rayon arrive sur un dioptre séparant un milieu incident n_1 d'indice supérieur au second milieu n_2 , il peut, si l'angle d'incidence est suffisamment grand ne pas y avoir de rayon réfracté mais uniquement un rayon réfléchi. On parle de réflexion totale. Il faut pour cela que l'angle d'incidence soit supérieure à $\arcsin \frac{n_2}{n_1}$.

Q14. Ici l'angle limite pour qu'il y ait réfraction est de $\arcsin \frac{1}{n} = 41^\circ$. Or on éclaire ici avec un angle de 45° donc il devrait y avoir réflexion totale et le doigt ne devrait pas être éclairé.

II Automobile : sécurité routière et limitations de vitesses.

Q15. La photographie permet de remonter à la distance de freinage. On va chercher à la calculer théoriquement pour remonter à la vitesse initiale v_0 .

Modélisation : On peut assimiler ici la voiture à un point matériel M de masse m la masse de la voiture¹. On travaillera **dans le référentiel de la route supposé galiléen**. On associe à ce référentiel **un repère cartésien** d'axe Ox le long de la route et Oz vertical ascendant.

Bilan des actions : On va négliger l'action de l'air sur la voiture². Il reste :

- le **poids** de la voiture $\vec{P} = -mg\vec{e}_z$
- l'**action de la route** sur la voiture \vec{R} qui va se décomposer en une composante normale et une composante tangentielle : $\vec{R} = N\vec{e}_z - T\vec{e}_x$. Si l'on considère que la voiture progresse suivant Ox et qu'il y a **glissement (justifié par les traces de pneus)** avec $T > 0$ et $T = fN$.

Mise en équation et détermination de T : On applique le **principe fondamental de la dynamique** :

$$\begin{cases} m\ddot{x} &= -T \\ 0 &= N - mg \end{cases} \quad (5)$$

Il vient que $N = mg \implies T = fmg$ donc $m\ddot{x} = fmg$

Détermination de la distance de freinage (1) : Par intégration, il vient :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= v_0 - fgt \\ x(t) &= v_0t - \frac{fg}{2}t^2 \end{aligned}$$

1. On pourra aussi choisir d'appliquer un théorème de la résultante dynamique en traitant la voiture comme un solide.

2. C'est une approximation nécessaire car il est difficile de la modéliser mais elle est probablement critiquable dans les premiers moments du mouvement où la vitesse est encore importante.

La voiture s'arrête à l'instant $t = \frac{v_0}{fg}$ soit une distance de freinage

$$d = \frac{v_0^2}{2fg}$$

Détermination de la distance de freinage (autre méthode) : On applique le théorème de l'énergie cinétique entre l'instant initial et l'instant final. La seule force qui travaille est l'action de la route et son travail vaut :

$$W(\vec{T}) = \int_{x=0}^{x=d} -fmg\vec{e}_x \cdot dx\vec{e}_x = -fmgd$$

avec d la distance de freinage. Le TEC s'écrit donc :

$$0 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -fmgd \implies d = \frac{v_0^2}{2fg}$$

Détermination de d sur la photographie : On compte sur la ligne du bas-côtés environ 5 bandes blanches soit $d = 5 \times 3 + 5 \times 3.5 \approx 3 \times 10^1 \text{m}$ ³

Il vient :

$$v_0 = \sqrt{2fgd} = 2 \times 10^1 \text{m.s}^{-1} = 8 * 10^1 \text{km/h} \quad (6)$$

On est autour de la valeur limite sur une route de campagne mais la précision de la mesure rend délicate une décision claire.

III Détecteur de métaux

III.1 Étude d'un circuit RLC

Q16. En négligeant le courant entrant dans l'oscilloscope par les voies 1 et 2 (résistances d'entrée très grandes), on a donc le même courant i qui circule dans chaque dipôle. La loi des mailles s'écrit donc

$$e = R'i + L\frac{di}{dt} + v_c \quad \text{avec} \quad i = C\frac{dv_c}{dt} \quad \text{d'où}$$

3. Cette mesure est très imprécise.

$$e = LC \frac{d^2 v_c}{dt^2} + R'C \frac{dv_c}{dt} + v_c \Leftrightarrow \boxed{\frac{d^2 v_c}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dv_c}{dt} + \omega_0^2 v_c = \omega_0^2 e}$$

avec $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$ la **pulsation propre** et $\boxed{Q = \frac{1}{R'} \sqrt{\frac{L}{C}}}$ le **facteur de qualité**.

Q17. En régime libre l'équation différentielle est homogène et se limite à la solution générale du type

$$v_c(t) = \lambda e^{r_+ t} + \mu e^{r_- t} \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{C} \quad \text{et} \quad (r_+, r_-)$$

les racines de l'équation caractéristique

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$$

à condition que ces racines soient distinctes, donc que le discriminant

$$\Delta = 4\omega_0^2 \left(\frac{1}{4Q^2} - 1 \right)$$

soit non nul. Ici $Q > \frac{1}{2}$ donc $\Delta < 0$ donc les racines sont complexes conjuguées :

$$r_{\pm} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega \quad \text{avec} \quad \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}.$$

La solution est donc pseudo-périodique de pseudo-pulsation ω et de pseudo-période

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = T_0 \left(1 - \frac{1}{4Q^2} \right)^{-\frac{1}{2}}} \quad \text{avec} \quad \boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}}.$$

Q18. On obtient

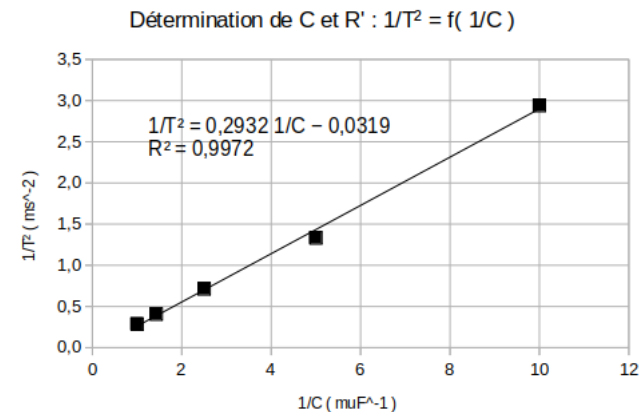
$$\frac{1}{T^2} = \frac{1}{T_0^2} \left(1 - \frac{1}{4Q^2} \right) = \frac{1}{4\pi^2 LC} \left(1 - \frac{R'^2 C}{4L} \right) \quad \text{d'où}$$

$$\boxed{\frac{1}{T^2} = a + \frac{b}{C}} \quad \text{avec} \quad \boxed{a = -\frac{R'^2}{16\pi^2 L^2}} \quad \text{et} \quad \boxed{b = \frac{1}{4\pi^2 L}}.$$

Q19. D'après la relation ci-dessus, il existe une relation affine entre les grandeurs $X = \frac{1}{C}$ et $Y = \frac{1}{T^2}$: $Y = a + bX$. On complète le tableau proposé en calculant X et Y :

C (μF)	0,10	0,20	0,40	0,70	1,00
T (ms)	0,58	0,87	1,18	1,57	1,87
$X = \frac{1}{C}$ (μF ⁻¹)	10	5,0	2,5	1,4	1,0
$Y = \frac{1}{T^2}$ (ms ⁻²)	2,9	1,3	0,71	0,41	0,29

On trace (sur la calculatrice) les points $Y = f(X)$, ce qui donne :



La régression linéaire conduit à :
 $a \approx -0,0319 \text{ ms}^{-2} = -3,19 \times 10^4 \text{ s}^{-2}$ et
 $b \approx 0,293 \text{ μF} \cdot \text{ms}^{-2} = 0,293 \text{ F} \cdot \text{s}^{-2}$.

On en déduit $\boxed{L = \frac{1}{4\pi^2 b}} = \underline{86 \text{ mH}}$ et $\boxed{R' = \frac{\sqrt{-a}}{\pi b}} = \underline{0,19 \text{ k}\Omega}$.

Q20. Lors de l'application d'un échelon de tension, le régime permanent vers lequel converge le circuit correspond au condensateur chargé et le courant nul. Les oscillogrammes rendent compte du retour du courant à vers 0 (car on visualise $u_R = Ri$).

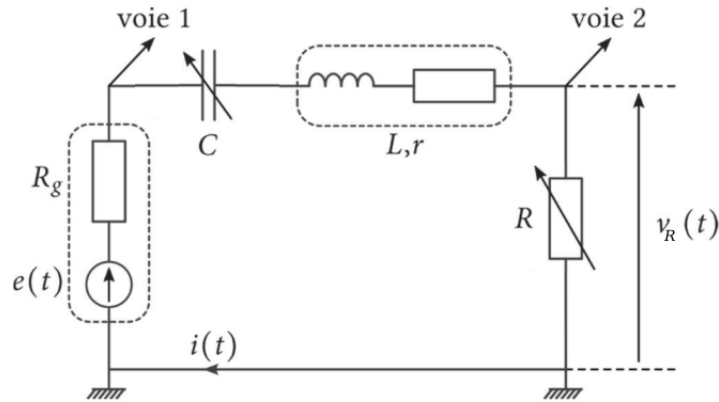
La **courbe 1** décroît vers 0 en restant positive : c'est un **régime aperiodique**.

La **courbe 3** décroît d'abord au dessous de 0 puis croît vers 0 :

c'est un **régime pseudo-périodique**.

La **courbe 2** s'apparente aussi à un régime apériodique, mais atteignant plus rapidement le régime permanent. Il se pourrait que ce soit le **régime critique** (le plus rapide des régimes apériodiques).

Pour visualiser la tension aux bornes de la résistance en voie 2 et celle aux bornes du GBF en voie 1, il faut soit permuter masse et voie 1, et déplacer la voie 2 sur R , soit simplement permuter le condensateur avec la résistance comme ci-dessous.



Q21. Le régime critique est obtenu lorsque le discriminant de l'équation caractéristique est nul, donc pour

$$Q = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{R'} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}} - R_g - r.$$

Q22. On en déduit $\alpha = 2\sqrt{L}$ et $\beta = -R_g - r$, d'où

$$L = \frac{\alpha^2}{4} = \underline{84 \text{ mH}} \quad \text{et} \quad r = -R_g - \beta = \underline{31 \Omega}.$$

La valeur de L est conforme à celle trouvée précédemment (2% d'écart), et celle de r est raisonnable pour une bobine.

Q23. La courbe ressemble à une courbe de **résonance en courant** (donc en u_R), c'est-à-dire à une courbe de gain de filtre passe-bande en fonction de la fréquence. En régime sinusoïdal forcé de

pulsation ω , pour force électromotrice du GBF $e(t) = E \cos(\omega t)$, on obtient un courant $i(t) = I \cos(\omega t + \varphi)$ dont l'amplitude I est obtenue en passant en notation complexe :

$$i = \frac{e}{R' + j\omega L - \frac{j}{\omega C}} \Rightarrow I = \frac{E}{\sqrt{R'^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

Cette expression indique une résonance (un maximum) en $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. La lecture du graphe donne une fréquence de résonance $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \underline{0,51 \text{ kHz}}$. Cette valeur correspondrait à une capacité $C = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 L} = \underline{1,1 \mu\text{F}}$ si $L = 86 \text{ mH}$ est supposée connue.

La largeur de cette résonance permet d'évaluer le facteur de qualité et donc la résistance totale R' . Les 2 fréquences de coupure correspondent à la valeur $\frac{150}{\sqrt{2}} \approx 106$ ce qui conduit à $0,34 \text{ kHz}$ et $0,73 \text{ kHz}$, et une largeur $\Delta f = \underline{0,39 \text{ kHz}}$. On en

déduit $Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \underline{1,3}$ et donc $R' = \frac{1}{Q} \sqrt{\frac{L}{C}} \approx 0,21 \text{ k}\Omega$. Pour en déduire r , on utilise la régression linéaire proposée pour R_c en fonction de $\frac{1}{\sqrt{C}}$. Elle conduit à $R_c = 0,47 \text{ k}\Omega$ pour $Q_c = \frac{1}{2}$, ce qui permet d'écrire

$$\frac{Q}{Q_c} = \frac{R_c + R_g + r}{R'} \Leftrightarrow r = 2QR' - R_g - R_c = \underline{38 \Omega}.$$

Il y a un écart notable avec la valeur précédemment obtenue (31Ω), mais aux incertitudes près de détermination graphique, cela reste raisonnable.

III.2 Oscillateur quasi-sinusoïdal

Q24. En convention croisée la loi d'Ohm s'écrit $v_e - v_s = R_3 i$.

Q25. Comme $i_+ = 0$, les résistances R_1 et R_2 sont en série et forment un pont diviseur de tension : $v_+ = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_s$. Or $v_+ = v_- = v_e$

$$\text{donc } v_s = \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) v_e.$$

Q26. En combinant ces deux relations on obtient $v_e = R_n i$ avec

$$R_n = -\frac{R_2 R_3}{R_1}. \text{ Le dipôle se comporte donc comme une résistance négative entre l'entrée - et la masse.}$$

Q27. En remplaçant le montage à résistance négative par une simple résistance de valeur R_n , la loi des mailles s'écrit :

$$0 = L \frac{di}{dt} + (R + r + R_n) i + v_c \quad \forall t.$$

Comme $i = C \frac{dv_c}{dt}$, en multipliant cette équation par $\frac{1}{L}$ et en la dérivant par rapport au temps, on obtient

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\xi\omega_0 \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0, \text{ avec } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ et } \xi = \frac{R + r + R_n}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Q28. Ce circuit peut osciller indéfiniment si le coefficient d'amortissement ξ est nul, donc si $R_n = -R - r$. On annule ainsi la résistance présente dans le circuit RLC initial.

Les oscillations seront alors harmoniques de pulsation ω_0 , donc de période $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$.

La source d'énergie permettant compenser les pertes par effet Joule dans R et r est l'alimentation de l'ALI.

III.3 Application au détecteur de métaux

Q29. Il est impossible en pratique de fabriquer des composants absolument identiques. À défaut, pour avoir $f_r = f_d$ on peut ajuster la valeur du produit LC en utilisant une **capacité variable** sur l'un des oscillateurs, comme en première partie.

Q30. En l'absence du métal, $f_d = \frac{1}{2\pi\sqrt{CL}}$, puis en présence du métal elle vaut

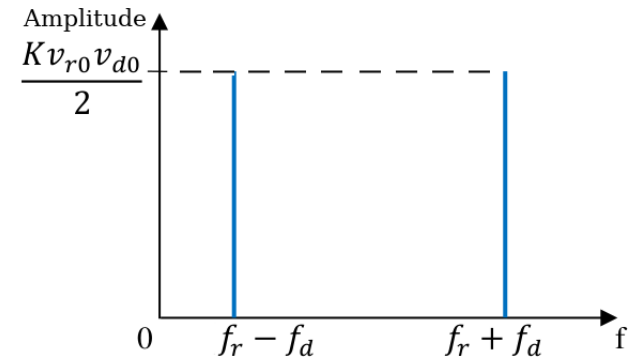
$$f'_d = \frac{1}{2\pi\sqrt{CL'}} = f_d \left(1 - \frac{M^2}{LL_m}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx f_d \left(1 + \frac{M^2}{2LL_m}\right)$$

d'où la variation relative $\frac{\Delta f_d}{f_d} = \frac{f'_d - f_d}{f_d} \approx \frac{M^2}{2LL_m}$.

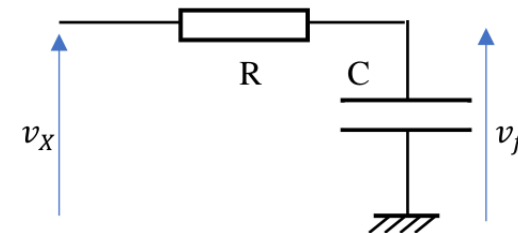
Q31. On linéarise le produit $v_X(t) = K \cdot v_{0d} \cdot v_{0r} \cdot \cos(2\pi f_r t) \cdot \cos(2\pi f_d t)$ ce qui donne

$$v_X(t) = \frac{K v_{0d} v_{0r}}{2} \cos(2\pi(f_d - f_r)t) + \frac{K v_{0d} v_{0r}}{2} \cos(2\pi(f_d + f_r)t).$$

Le spectre en amplitude a l'allure ci-dessous.



Q32. Il faut réaliser un **filtre passe-bas** qui préserve la première composante et élimine la seconde. Le montage le plus simple est un circuit R-C série, dont on prend la tension de sortie sur la capacité.



En effet en basse fréquence le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert donc $v_f = v_X$, alors qu'à haute fréquence le condensateur équivaut à un fil donc $v_f = 0$.

Le document 3 indique des variations de fréquence $\Delta f_d = f_r - f_d$ de l'ordre de 1 kHz. La fréquence de fonctionnement est de l'ordre de 7,5 kHz, donc on aura $f_d + f_r \approx 15$ kHz. Ainsi on peut requérir pour le filtre une fréquence de coupure $f_c \approx 1,5$ kHz.

La fonction de transfert de ce filtre est $\underline{H} = \frac{1}{1+jRC\omega}$, donc son gain $G = \frac{1}{\sqrt{1+4\pi^2 R^2 C^2 f^2}}$, et donc $f_c = \frac{1}{2\pi RC}$. Ceci implique

$\boxed{RC = \frac{1}{2\pi f_c}} \approx \underline{1,1 \times 10^{-4} \text{ s}}$. On choisit une grande résistance pour que l'impédance d'entrée du filtre soit grande tout en permettant une valeur raisonnable de capacité, par exemple : $\underline{R = 100 \text{ k}\Omega}$ et $\underline{C = 1,1 \text{ nF}}$, ou bien $\underline{R = 10 \text{ k}\Omega}$ et $\underline{C = 11 \text{ nF}}$...

Q33. La fréquence lente correspond à la différence des fréquences des 2 oscillateurs, elle est obtenue graphiquement : $\underline{f_d - f_r \approx \frac{6}{0,040} \approx 150 \text{ Hz}}$. On lit aussi une amplitude crête à crête de 1,0 V (la même pour le signal lent et le rapide). En sortie du filtre, le gain pour la composante lente est proche de 1 et le déphasage proche de 0, donc le signal s'identifie à la première composante spectrale de $v_X(t)$, la seconde étant éliminée :

$$\boxed{v_f(t) \approx \frac{K v_{0d} v_{0r}}{2} \cos(2\pi(f_d - f_r)t)} \text{ avec } \underline{\frac{K v_{0d} v_{0r}}{2} \approx 0,5 \text{ V}}.$$