

ÉLECTROCINÉTIQUE

I. Régime transitoire dans un circuit RLC parallèle

1. Par continuité du courant dans la bobine et de la tension aux bornes du condensateur, on a $i_1(0^+) = i_1(0^-) = 0$ et $u(0^+) = u(0^-) = 0$. De plus $i_3(0^+) = u(0^+)/R$, d'où $i_3(0^+) = 0$ et $i_2(0^+) = i(0^+)$. La loi des mailles donne alors $E = ri(0^+) + 0$, d'où $i_2(0^+) = E/r$.
Le régime permanent sera stationnaire, donc lorsqu'il est atteint la bobine se comporte comme un fil et le condensateur comme un interrupteur ouvert. On en déduit $u = 0$, $i_3 = u/R = 0$, $i_2 = 0$ et $i_1 = i = E/r$ par la loi des mailles.

2. La loi des mailles et la loi des noeuds mènent à $E = r(i_1 + i_2 + i_3) + u$.
Or on a $u = Ri_3 = L \frac{di_3}{dt}$, et $i_2 = C \frac{du}{dt}$. En dérivant par rapport au temps la première équation on obtient donc

$$0 = \frac{rR}{L}i_3 + rCR \frac{d^2i_3}{dt^2} + (r + R) \frac{di_3}{dt},$$

ce qui mène à la forme canonique

$$\frac{d^2i_3}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{di_3}{dt} + \omega_0^2 i_3 = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{rR}{r + R} \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

3. Le régime pseudo-périodique correspond à une combinaison linéaire de solutions du type $e^{r_{1,2}t}$ avec $r_{1,2}$ complexes conjuguées, ce qui est le cas si le discriminant de l'équation caractéristique est négatif :

$$\omega_0^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 4 \right) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad Q > \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2rR}{r + R} > \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \Leftrightarrow \quad 2\sqrt{\frac{C}{L}} > \frac{1}{r} + \frac{1}{R}.$$

4. On obtient $Q = 5,9$, donc on aura un régime pseudopériodique. D'autre part $\omega_0 = 7,1.10^3 \text{ rad.s}^{-1}$, et donc $T_0 = 2\pi/\omega_0 = 8,9.10^{-4} \text{ s}$.

5. La pseudo-pulsation est la partie imaginaire des racines de l'équation caractéristique :

$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - 1/(4Q^2)} = 7,0.10^3 \text{ rad.s}^{-1}$. Comme Q est relativement grand, ω est très proche de ω_0 , la différence étant à la limite de la précision disponible. De même $T = 2\pi/\omega = 8,9.10^{-4} \text{ s}$ ne se distingue pas de T_0 .

6. Posons τ le temps caractéristique vérifiant $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$. La solution générale s'écrit alors

$$i_3(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)).$$

On détermine les deux constantes d'intégration A et B par les conditions initiales : $i_3(0^+) = 0 = A$, et

$$\frac{di_3}{dt}(0^+) = \frac{1}{R} \frac{du}{dt}(0^+) = \frac{1}{RC} i_2(0^+) = \frac{E}{rRC} = -\lambda A + B\omega = B\omega. \quad \text{On en tire} \quad i_3(t) = \frac{E}{rRC\omega} e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\omega t).$$

7. Les maxima (ou les minima) de i_3 sont T -périodiques. On définit le décroissement logarithmique par $\delta = \ln \frac{i_{3 \max}(t_m)}{i_{3 \max}(t_m + T)}$, en notant t_m un maximum local de i_3 . Or, en notant $I_m = \frac{E}{rRC\omega}$, on a

$$i_{3 \max}(t_m + T) = I_m e^{-\frac{t_m + T}{\tau}} \sin(\omega(t_m + T)) = I_m e^{-\frac{t_m + T}{\tau}} \sin(\omega t_m) = i_{3 \max}(t_m) e^{-\frac{T}{\tau}} \quad \text{car} \quad \omega T = 2\pi.$$

On en déduit $\delta = \frac{T}{\tau} = \frac{\omega_0 T}{2Q} \approx \frac{\pi}{Q} = 0,5$.

8. Le critère impose un temps d'établissement du régime permanent t_{1000} qui s'exprime sur l'enveloppe par

$$I_m e^{-\frac{t_{1000}}{\tau}} = I_m 0,001 \quad \Leftrightarrow \quad t_{1000} = \tau \ln 1000 = \frac{2Q}{\omega_0} \ln 1000 = 12 \text{ ms}.$$

II. Étude expérimentale d'une bobine réelle

Première partie.

1. On mesure, entre $t = 0$ et $t = 4,0$ ms, une période $T = 4,0$ ms, d'où $f = \frac{1}{T} = 0,25 \times \text{kHz}$.

On lit directement les amplitudes $U_e = 5,0\text{V}$ et $U_R = 2,5\text{V}$.

D'après la loi d'Ohm $u_R = Ri$ on déduit que $I = \frac{U_R}{R} = 63\text{mA}$.

2. En notation complexe, la loi d'Ohm s'écrit

$$\underline{u}_e = \underline{Z}_{AM} \cdot \underline{i} \Rightarrow |\underline{u}_e| = |\underline{Z}_{AM}| \cdot |\underline{i}| \Leftrightarrow U_e = |\underline{Z}_{AM}| \cdot I \Leftrightarrow |\underline{Z}_{AM}| = \frac{U_e}{I} = 80\Omega.$$

3. • — La tension $u_e(t)$ est en avance de phase sur $u_R(t)$, car elle passe avant par son maximum.
 — Le calcul du déphasage peut se faire en mesurant le décalage temporel entre deux passages à zéro d'un même front pour u_e et u_R : $t_e - t_R = -0,33$ ms. Alors :

$$\varphi_{u_e/u_R} = -2\pi f(t_e - t_R) = +0,52\text{rad} > 0$$

— On pouvait aussi s'inspirer de la méthode des 9 carreaux. Une demi-période (correspondant à un déphasage de π) occupe ici 6 carreaux et il y a 1 carreau de déphasage entre les deux signaux. Ainsi, $\varphi_{u_e/u_R} = \frac{1}{6}\pi \text{ rad} = \frac{\pi}{6} \text{ rad} = 30 \text{ deg}$.

- On a, par définition de l'impédance, $\varphi = \arg(\underline{Z}_{AM}) = \arg(\underline{u}_e) - \arg(\underline{i})$. Ainsi, on réécrit $\varphi = \arg(\underline{u}_e) - \arg(\underline{Ri}) = \arg(\underline{u}_e) - \arg(\underline{u}_R)$. D'où $\varphi = \varphi_{u_e/u_R}$.

4. $\underline{Z}_{AM} = r + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} + R$, donc $\underline{Z}_{AM} = R + r + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$. La partie réelle donne la résistance totale de la branche :

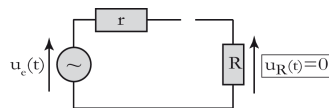
$$|\underline{Z}_{AM}| \cdot \cos \varphi = R + r \Leftrightarrow r = |\underline{Z}_{AM}| \cdot \cos \varphi - R = 29\Omega.$$

5. La partie imaginaire ou réactance vérifie :

$$|\underline{Z}_{AM}| \cdot \sin \varphi = L\omega - \frac{1}{C\omega} \Rightarrow L = \frac{|\underline{Z}_{AM}| \sin \varphi}{\omega} + \frac{1}{C\omega^2} \text{ avec } \omega = 2\pi f \text{ d'où } L = 66\text{mH}.$$

Deuxième partie.

6. À très basse fréquence, l'inductance L est équivalente à un fil, et le condensateur à un interrupteur ouvert. À très haute fréquence, c'est l'inverse. Dans les deux cas on obtient donc le même schéma équivalent suivant :



7. La loi du pont diviseur de tension conduit à : $U_R = \frac{RU_e}{R + r + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}$.

8. La forme canonique proposée comporte un dénominateur adimensionné de coefficient constant égal à 1. On ré-écrit donc le résultat précédent et on identifie :

$$\underline{U}_R = \frac{\frac{R}{R+r} U_e}{1 + \frac{j}{R+r} \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)} \Rightarrow U_{R,max} = \frac{R}{R+r} U_e.$$

De plus on identifie Q grâce au produit des deux termes variables

$$Q \frac{\omega}{\omega_0} \times Q \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{L\omega}{R+r} \times \frac{1}{(R+r)C\omega} \Leftrightarrow Q^2 = \frac{L}{(R+r)^2 C} \Rightarrow Q = \frac{1}{R+r} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

On peut donc ré-écrire

$$\underline{U}_R = \frac{U_{R,max}}{1 + jQ\left(\sqrt{LC}\omega - \frac{1}{\sqrt{LC}\omega}\right)} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

9. La résonance est un maximum d'amplitude U_R de $u_R(t)$. Or : $U_R = |U_R| = \frac{U_{R,max}}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$.

Donc U_R est maximale si $1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2$ est minimal, i.e. en $\omega_r = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

10. La fréquence de résonance conduit à $L = \frac{1}{4\pi^2 f_r^2 C} = 66\text{mH}$, et l'amplitude permet d'écrire

$$\frac{U_{R,max}}{U_e} = \frac{R}{R+r} \Leftrightarrow r = R \left(\frac{U_e}{U_{R,max}} - 1 \right) = 29\Omega.$$

Les résultats sont conformes aux précédents.

III. Impédance d'entrée d'un oscilloscope

- On a immédiatement $\boxed{u_1 = u}$ donc $\boxed{H_{DC} = 1}$.
- a) On peut appliquer la loi du pont diviseur de tension à condition d'associer les deux dipôles en parallèle :

$$\underline{H}_{AC} = \frac{u_2}{u} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{R_0} + j\omega C_0\right) \cdot \frac{1}{j\omega C_D}} = \frac{1}{1 + \frac{C_0}{C_D} + \frac{1}{jR_0 C_D \omega}} \quad \text{or} \quad \frac{C_0}{C_D} \ll 1$$

d'où $\boxed{\underline{H}_{AC} \approx \frac{1}{1 + \frac{1}{jx}} = \frac{jx}{1 + jx}}$ en posant $\boxed{x = R_0 C_D \omega}$.

Il s'agit de la fonction de transfert d'un **filtre passe-haut du 1er ordre**.

Remarque : on pourrait aussi traiter un tel circuit avec la loi des nœuds en termes de potentiel, après avoir placé une masse sur la ligne inférieure :

$$jC_D \omega (u - u_2) - \frac{u_2}{R_0} - jC_0 \omega u_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad jC_D \omega u = u_2 \left(\frac{1}{R_0} + j(C_0 + C_D)\omega \right)$$

$$\Rightarrow \underline{H}_{AC} = \frac{jR_0 C_D \omega}{1 + jR_0(C_0 + C_D)\omega} \approx \underline{H}_{AC} \simeq \frac{jR_0 C_D \omega}{1 + jR_0 C_D \omega} = \frac{jx}{1 + jx}$$

b) Le gain est donné par le module de \underline{H}_{AC} : $\boxed{G_{AC} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}}}$ $\Rightarrow \boxed{G_{AC,max} = 1}$.

La fréquence de coupure est donnée par $x_{c,AC}$ telle que $G_{AC} = \frac{G_{AC,max}}{\sqrt{2}}$, ce qui donne $x_{c,AC} = 1 = R_0 C_D \omega_c$. Ainsi, $\boxed{f_{c,AC} = \frac{1}{2\pi R_0 C_D}}$.

3. a) On lit $U_1 = 2,0\text{ V}$ et $U_2 = 1,4\text{ V}$, donc $\boxed{\frac{U_2}{U_1} = 0,70 \approx \frac{1}{\sqrt{2}}}$.

La fréquence de l'oscillogramme correspond donc à la coupure : on lit $T \approx 84\text{ ms}$ donc $\boxed{f_{c,AC} = \frac{1}{T}} = 12\text{ Hz}$.

Remarque : cette valeur est très basse mais c'est normal pour la fréquence de coupure en couplage AC dont le but est d'éliminer seulement la composante continue du signal.

b) La voie 2 est en avance par rapport à la voie 1. L'écart entre 2 zéros montants est de $\Delta t = t_2 - t_1 \approx -10\text{ ms}$.

Or, la période T des signaux est $T \approx 84\text{ ms}$, donc $\boxed{\varphi = -2\pi \frac{\Delta t}{T}} = 0,77\text{ rad} = 44^\circ$. On est donc très proche de $\frac{\pi}{4}$.

Or ce déphasage doit vérifier $\varphi = \arg(\underline{H}_{AC}) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{4}$. On en déduit $x \approx 1,0$ donc $f \approx f_{c,AC} = \frac{1}{T} \approx 12\text{ Hz}$.

c) On calcule $\boxed{C_D = \frac{1}{2\pi R_0 f_c}} = 13\text{ nF} \gg C_0$.

4. D'un point de vue fréquentiel, le couplage AC correspond à la réponse d'un filtre passe-haut sur un échelon de tension : elle est discontinue au départ car les hautes fréquences passent, mais elle tend vers 0 ensuite, car la fréquence nulle (valeur moyenne) ne passe pas. Plus précisément, la période du signal créneau est de $T_{cr} = 400\text{ ms}$. Son fondamental a donc une fréquence $f = \frac{1}{T_{cr}} = 2,5\text{ Hz} \approx f_{c,AC}/5$. Ainsi, les 4 premières harmoniques sont en dehors de la bande passante, donc affectées (voire éliminées) par le couplage AC. Plus concrètement, on voit que le mode AC essaie de supprimer la valeur moyenne de chaque arche d'échelon, car celui-ci est de fréquence très faible donc perçu comme constant sur chaque

demi-période.

D'un point de vue temporel, on peut obtenir l'équation différentielle entre u_2 et $u = u_1$ à partir de la fonction de transfert :

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{jx}{1 + jx} \Leftrightarrow (1 + R_0 C_D j\omega)u_2 = R_0 C_D j\omega u_1 \Rightarrow u_2 + R_0 C_D \frac{du_2}{dt} = R_0 C_D \frac{du_1}{dt}, \forall t.$$

On va donc observer la réponse d'un système du premier ordre à des échelons, mais du point de vue du courant (tension sur la résistance) qui est discontinu. Ceci explique la présence d'arches d'exponentielles décroissant vers zéro dans le signal u_2 .

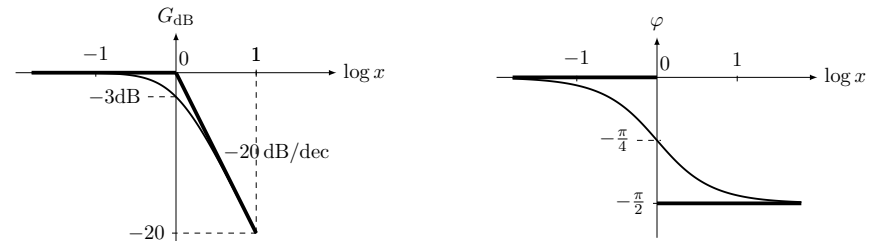
5. La loi du pont diviseur de tension donne immédiatement : $\underline{H} = \frac{\frac{1}{j\omega C_D}}{R + \frac{1}{j\omega C_D}} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$ d'où $\boxed{\underline{H} = \frac{1}{1 + jx}}$ avec $\boxed{x = RC\omega}$.

6. Il s'agit d'un filtre passe-bas du 1er ordre. Les équivalents de la fonction de transfert donnent : Basses Fréquences (BF, $\omega \ll \frac{1}{RC}$) : $\underline{H} \sim 1$ donc $\boxed{G_{dB} \simeq 0}$ et $\boxed{\varphi \simeq 0}$.

Hautes Fréquences (HF, $\omega \gg \frac{1}{RC}$) : $\underline{H} \sim \frac{1}{jx}$ donc $\boxed{G_{dB} \sim -20 \log x}$ et $\boxed{\varphi \sim -\frac{\pi}{2}}$.

À la fréquence propre $x = 1$ (qui est aussi la fréquence de coupure) : $\underline{H} = \frac{1}{1+j}$ donc $\boxed{G_{dB}(1) = -3,0\text{ dB}}$ et $\boxed{\varphi(1) = -\frac{\pi}{4}}$.

Le gain maximal est obtenu en BF : $\boxed{G_{dB,max} = 0}$. Ci-dessous l'allure du diagramme asymptotique est en traits épais, et le diagramme réel en traits fins.



7. À la coupure $G = |\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{1+(RC\omega_c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, soit $RC\omega_c = 1$, d'où $\boxed{f_c = \frac{1}{2\pi RC}}$.

A.N. : (a) et (b) donnent $\boxed{f_c = 5,0\text{ kHz}}$.

8. De nouveau on utilise le pont diviseur de tension : $\underline{H}' = \frac{1}{1 + R\left(\frac{1}{R_0} + j\omega(C + C_0)\right)}$
 $\Rightarrow \underline{H}' = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega'_c}}$ avec $\boxed{H_0 = \frac{R_0}{R + R_0}}$ et $\boxed{\omega'_c = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_0}\right) \frac{1}{C + C_0}}$.

Il s'agit toujours d'un filtre **passe-bas** du premier ordre.

9. Le gain maximal devient, toujours à très basse fréquence, $\boxed{G_{dB,max} = 20 \log H_0 = -20 \log\left(1 + \frac{R}{R_0}\right)}$.

La fréquence de coupure devient $\boxed{f'_c = \frac{1}{2\pi(C + C_0)} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_0}\right)}$.

A.N. : (a) $\boxed{G_{dB,max} = -4,1 \cdot 10^{-2}\text{ dB} \simeq 0}$ et $\boxed{f_c = 5,0\text{ kHz}}$

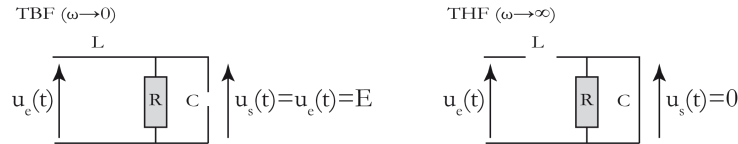
(b) $\boxed{G_{dB,max} = -4,5\text{ dB} \neq 0}$ et $\boxed{f_c = 3,6\text{ kHz}}$

Conclusion : les valeurs sont bien affectées par la présence de l'oscilloscope dans le cas (b) où l'impédance de l'oscilloscope n'est pas négligeable, alors qu'elles ne le sont pas dans le cas (a).

IV. Obtention d'une tension continue réglable

Analyse fréquentielle du circuit

1. À Très Basse Fréquence (TBF) la bobine est assimilable à un fil et le condensateur à un interrupteur ouvert.
À Très Haute Fréquence (THF) c'est l'inverse. Les circuits asymptotiques sont donc respectivement :



2. On utilise la relation du pont diviseur de tension, après avoir associé les dipôles R et C :

$$\frac{u_s}{u_e} = \frac{U_s}{E} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{R} + j\omega C\right) j\omega L} = \frac{1}{1 - \omega^2 LC + j\frac{\omega L}{R}}, \quad \text{d'où}$$

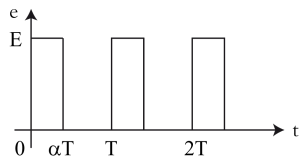
$$\boxed{\frac{U_s}{E} = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{\omega_0 Q}}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \quad \text{et} \quad \boxed{Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}}.$$

3. On en déduit $U_s = |U_s| = \frac{E}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0 Q}\right)^2}}$.

4. La phase à l'origine de $u_s(t)$ est aussi le déphasage entre $u_s(t)$ et $u_e(t)$:

$$\begin{aligned} \varphi &= \arg\left(\frac{U_s}{E}\right) = -\arg\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{\omega_0 Q}\right) = -\arg\left(j\frac{\omega}{\omega_0 Q} \left(jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) + 1\right)\right) \\ &= -\arg\left(j\frac{\omega}{\omega_0 Q}\right) - \arg\left(1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right) \quad \text{d'où} \quad \boxed{\varphi = -\frac{\pi}{2} - \arctan\left(Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)} \quad (\text{et } \varphi(0) = 0). \end{aligned}$$

Fabrication de la tension continue



5.
6. Par définition de la valeur moyenne :

$$\langle e(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T e(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{\alpha T} E dt \quad \text{d'où} \quad \boxed{\langle e(t) \rangle = \alpha E}.$$

7. En réutilisant les résultats des questions 3. et 4., on a $s_n(t) = S_n \cos(n\omega t + \psi_n + \varphi_n)$ avec

$$\boxed{S_n = \frac{A_n}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{n\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{n\omega}{\omega_0 Q}\right)^2}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\varphi_n = -\frac{\pi}{2} - \arctan\left(Q\left(\frac{n\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{n\omega}\right)\right)}.$$

8. On utilise le théorème de superposition pour ce circuit linéaire. De plus, a_0 étant la valeur moyenne du signal d'entrée, il vaut αE . La réponse s_0 aux bornes de $R//C$ associée à cette composante « continue » est aussi αE : en effet pour $\omega = 0$, d'après 3. et 4., l'amplitude est inchangée et il n'y a pas de déphasage. Ainsi :

$$\boxed{s(t) = \alpha E + \sum_{n=1}^{\infty} S_n \cos(n\omega t + \psi_n + \varphi_n)}.$$

9. La pulsation de coupure est de l'ordre de grandeur de ω_0 (dépend de Q pour un filtre d'ordre 2). Donc en première approximation on peut considérer que les harmoniques de pulsation $n\omega = 10n\omega_0$ seront éliminées par le filtre. Il ne restera donc que la composante de pulsation nulle s_0 , donc le signal de sortie est approximativement constant : $\boxed{s(t) \approx \alpha E}$.

Remarque : on a donc réalisé une tension constante de niveau ajustable en faisant varier la constante α appelée « rapport cyclique ».

10. On calcule l'amplitude du premier harmonique négligé (qui sera le premier, soit $n = 1$, car les amplitudes sont décroissantes avec n et le gain du filtre est décroissant avec ω puisque c'est un passe-bas).

$$S_1 = \frac{A_1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0 Q}\right)^2}} = \frac{A_1}{\sqrt{(1 - 100)^2 + 2 \times 100}} \approx \frac{A_1}{100} \quad \text{avec} \quad A_1 = \frac{4E}{\pi}.$$

On en déduit le taux d'ondulation $\frac{S_1}{s_0} = \frac{4}{100 \alpha \pi} \approx 2,5\%$. La tension est donc constante modulo des oscillations de l'ordre de 2,5% de sa valeur.