

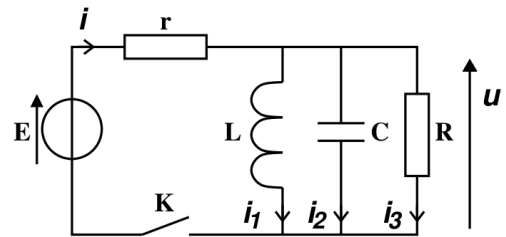
ÉLECTROCINÉTIQUE

Le devoir comporte quatre problèmes totalement indépendants pouvant être traités dans l'ordre de votre choix (à indiquer clairement !).

CALCULATRICES AUTORISÉES

I. Régime transitoire dans un circuit RLC parallèle

On considère le circuit suivant, constitué d'une source idéale de tension E , de deux résistors de résistance R et r , d'un condensateur de capacité C et d'une bobine d'inductance L . Au départ le condensateur n'est pas chargé et tous les courants sont nuls. On ferme l'interrupteur K à l'instant $t = 0$.

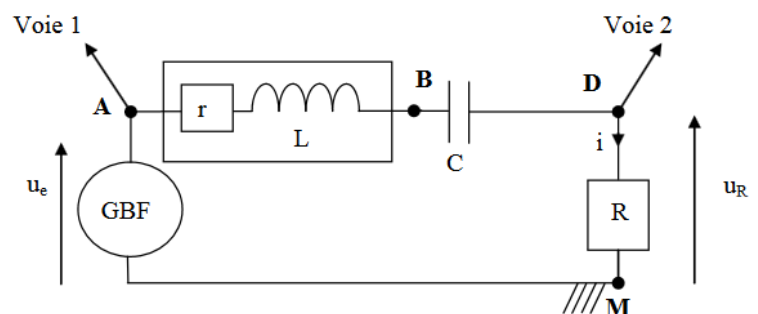


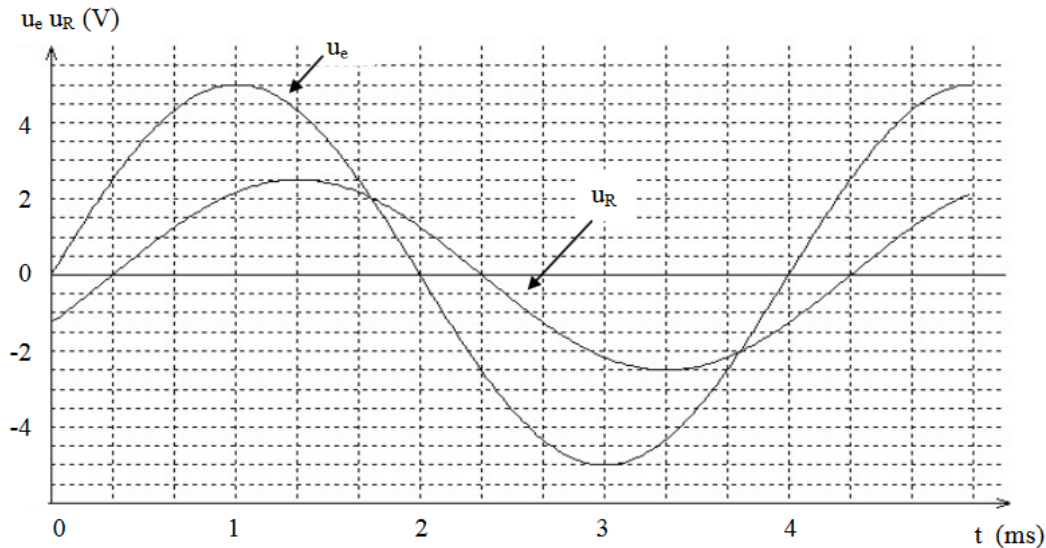
1. Déterminer u , i_1 , i_2 et i_3 aux instants suivants :
 - juste après la fermeture de l'interrupteur ($t = 0^+$),
 - lorsque le régime permanent est établi.
2. Établir l'équation différentielle vérifiée par i_3 . On la mettra sous forme canonique et on donnera l'expression de la pulsation propre ω_0 et du facteur de qualité Q .
3. Quelle relation doit exister entre r , R , C , et L pour que la solution de l'équation différentielle corresponde à un régime pseudo-périodique ?
Pour la suite, on prendra : $r = 2,5 \text{ k}\Omega$; $R = 1,25 \text{ k}\Omega$; $C = 1,0 \mu\text{F}$; $L = 20 \text{ mH}$.
4. Que vaut le facteur de qualité du circuit ?
Calculer numériquement la pulsation propre ω_0 , la période propre T_0 .
5. Définir et calculer la pseudo-pulsation ω et la pseudo-période T . Compte-tenu de la précision des données, que peut-on dire des valeurs numériques de ω_0 et de ω ?
6. Déterminer l'expression de i_3 en fonction du temps, en tenant compte des conditions initiales.
7. Définir le décrétement logarithmique δ et calculer sa valeur.
8. Calculer le temps t_{1000} nécessaire pour que le régime permanent soit pratiquement établi dans le circuit, sous le critère que l'amplitude de i_3 est toujours inférieure au millième de sa valeur maximale.

II. Étude expérimentale d'une bobine réelle

On dispose d'une bobine que l'on assimilera à l'association série d'une inductance L et d'une résistance r , dont on souhaite déterminer expérimentalement les valeurs, par différentes méthodes.

On place en série avec la bobine, un résistor de résistance $R = 40 \Omega$ et un condensateur de capacité $C = 10 \mu\text{F}$. Le G.B.F. (générateur basses fréquences) est réglé pour délivrer une tension sinusoïdale de fréquence f (pulsation ω). Les tensions u_e et u_R sont visualisées respectivement sur les voies 1 et 2 d'un oscilloscope (cf. figure ci-contre). La masse localisée en M correspond au branchement à la terre.



Première partie : étude d'un oscillogramme

1. On obtient l'oscillogramme représenté dans la figure ci-dessus. Mesurer sur l'oscillogramme la fréquence f délivrée par le GBF et les amplitudes U_e de la tension u_e et U_R de la tension u_R . En déduire l'amplitude I du courant i .
2. En déduire la valeur numérique du module de l'impédance Z_{AM} du dipôle AM .
3. Sur l'oscillogramme, mesurer le déphasage φ_{u_e/u_R} de u_e par rapport à u_R . Quel est le lien entre φ_{u_e/u_R} et l'argument $\varphi = \arg(Z_{AM})$?
4. Exprimer l'impédance complexe Z_{AM} en fonction de ω et des paramètres du circuit. En déduire l'expression de r en fonction de R , $|Z_{AM}|$ et $\cos \varphi$. Calculer sa valeur.
5. Exprimer L en fonction de C , ω , $|Z_{AM}|$ et $\sin \varphi$. Calculer sa valeur.

Deuxième partie : résonance.

On considère toujours le montage ci-dessus. En régime sinusoïdal forcé on a :

$$\begin{cases} u_e(t) = U_e \sin(\omega t) \\ u_R(t) = U_R \sin(\omega t + \psi) \end{cases}$$

On rappelle que U_R et ψ dépendent de la pulsation ω .

6. Proposer un montage équivalent au montage ci-dessus en très basse ($\omega \rightarrow 0$) puis en très haute fréquence ($\omega \rightarrow \infty$). En déduire la tension $u_R(t)$ dans ces deux cas asymptotiques.
7. On pose la notation complexe :

$$\begin{cases} \underline{u_e}(t) = U_e e^{j\omega t} \\ \underline{u_R}(t) = U_R e^{j(\omega t + \psi)} = U_R e^{j\psi} e^{j\omega t} = \underline{U_R} e^{j\omega t} \end{cases}$$

Exprimer l'amplitude complexe $\underline{U_R}$ en fonction de r , R , L , C , ω , j et U_e .

8. Mettre $\underline{U_R}$ sous la forme :

$$\underline{U_R} = \frac{U_{R,max}}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

On exprimera littéralement $U_{R,max}$, la pulsation propre ω_0 ainsi que le facteur de qualité Q de ce circuit, à partir des données du problème.

9. Justifier que u_R admet une résonance et déterminer l'expression de la pulsation ω_r pour laquelle elle se produit.
10. Expérimentalement, on observe une résonance de la tension aux bornes R pour une fréquence $f_r = 196$ Hz. Le rapport d'amplitude U_R/U_e à la résonance est mesuré à 0,58. Déterminer les valeurs de r et L , à partir de ces mesures de résonance et des données initiales de R et C .

III. Impédance d'entrée d'un oscilloscope

On applique une tension $u(t)$ à l'entrée d'un oscilloscope et l'on cherche à étudier l'influence du couplage AC ou DC sur le signal affiché à l'écran.

Couplages DC et AC de l'oscilloscope

Le couplage DC (*Direct Current*) correspond à l'application directe de u (après une amplification propre à la sensibilité choisie) sur les plaques de déviation verticale. Celles-ci se comportent physiquement comme un condensateur de capacité très faible $C_0 = 63\text{ pF}$ en dérivation avec une grande résistance $R_0 = 1,0\text{ M}\Omega$ (voir figure 1, il est d'usage courant de négliger C_0).

Le couplage AC se différencie du couplage DC par l'ajout d'un condensateur de capacité C_D en série en amont des plaques de déviation verticale.

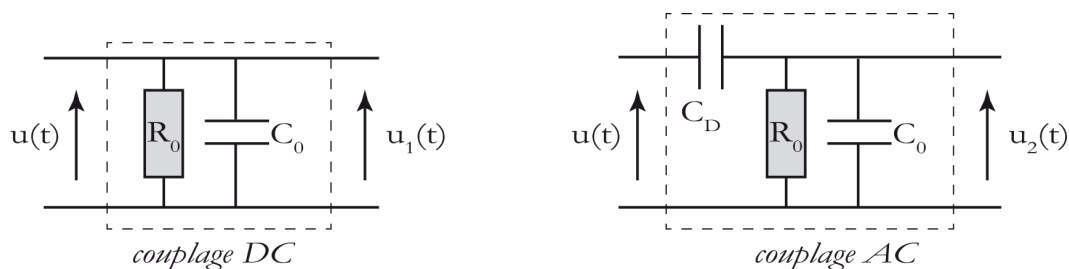


FIGURE 1 – Modélisation des couplages DC et AC de l'oscilloscope.

1. Relier u_1 à u dans le cas du couplage DC . Quel est alors la fonction de transfert \underline{H}_{DC} correspondant au couplage DC ?
2. Couplage AC .
 - a) Établir la fonction de transfert $\underline{H}_{AC} = \frac{u_2}{u}$ correspondant au couplage AC . Simplifier la fonction de transfert en considérant $C_D \gg C_0$ et la mettre sous forme canonique en définissant une pulsation réduite x . Quelle est la nature du filtre ?
 - b) Déterminer l'expression du gain $G_{AC} = |\underline{H}_{AC}|$ ainsi que le gain maximal $G_{AC,max}$ en couplage AC .
Exprimer la fréquence de coupure $f_{c,AC}$ correspondante.
3. Dans le but de déterminer expérimentalement la fréquence de coupure du filtre constitué par le couplage AC , on réalise maintenant la manipulation suivante : on applique la même tension sinusoïdale $u(t)$ sur l'entrée 1 (couplage DC) et sur l'entrée 2 (couplage AC) de l'oscilloscope. On fait varier la fréquence de $u(t)$ jusqu'à obtention de l'oscillogramme de la figure 2.
 - a) Déterminer la fréquence de coupure $f_{c,AC}$ en mesurant le rapport des amplitudes $\frac{U_2}{U_1}$.
 - b) Retrouver ce résultat en mesurant le déphasage φ de u_2 par rapport à u_1 .
 - c) En déduire la valeur de C_D et vérifier l'hypothèse $C_D \gg C_0$.
4. Le choix du couplage d'entrée AC peut donc perturber l'observation des signaux basse fréquence. L'oscillogramme de la figure 3 a été obtenu avec un signal carré envoyé sur la voie 1 (couplage DC) et simultanément sur la voie 2 (couplage AC).
Expliquer comment on peut interpréter la déformation observée avec le couplage AC .

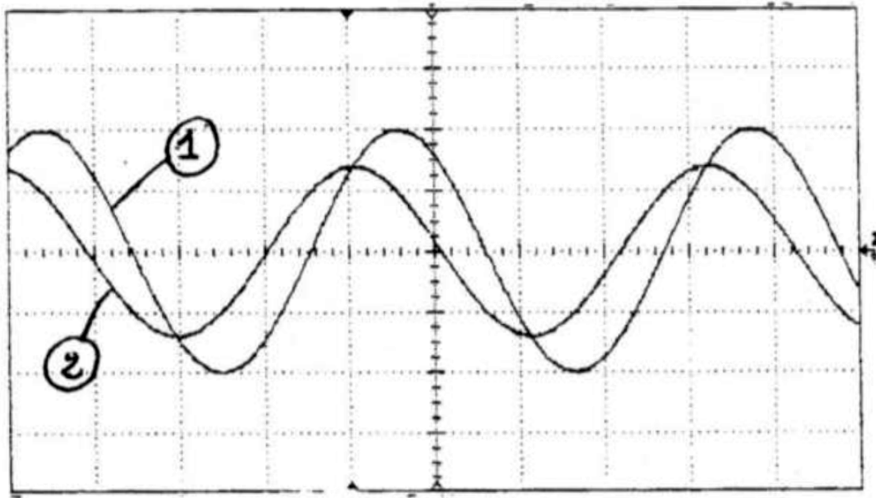


FIGURE 2 – Oscillogrammes de la même tension sinusoïdale $u(t)$ observée en couplage DC (voie 1) et en couplage AC (voie 2). Les sensibilités verticales sont de $1,0\text{V/division}$. La base de temps est de 20ms/division .

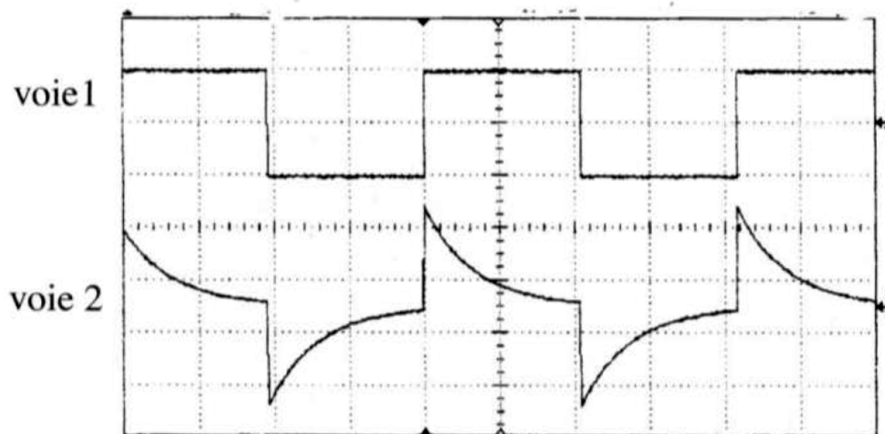


FIGURE 3 – Oscillogrammes de la même tension créneau observée en couplage DC (voie 1) et en couplage AC (voie 2). Les sensibilités verticales sont de $2,0\text{V/division}$. La base de temps est de 100ms/division . Les marques à droite de l'oscillogramme indiquent les zéros des voies.

Influence de l'impédance d'entrée en couplage DC

On considère le filtre RC de la figure 4. Ce filtre est alimenté par un générateur idéal de tension sinusoïdal délivrant la tension d'entrée $u_e(t) = E \cos(\omega t)$ d'amplitude $E > 0$ constante et de pulsation ω . On mesure la tension de sortie $u_s(t)$ aux bornes du condensateur, en régime sinusoïdal forcé.

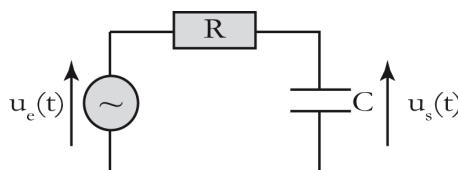


FIGURE 4 – Filtre RC .

Étude théorique du filtre.

5. Déterminer la fonction de transfert à vide du filtre de la figure 4, $\underline{H}(j\omega) = \frac{u_s}{u_e}$. La mettre sous forme canonique.
6. Établir puis tracer les diagrammes de Bode asymptotiques du filtre. On précisera les équations des asymptotes basse et haute fréquence, ainsi que la valeur maximale du gain en décibel, $G_{dB,max}$.
7. Déterminer l'expression littérale de la fréquence de coupure f_c du filtre.
Calculer numériquement sa valeur pour (a) $R = 4,7\text{ k}\Omega$ et $C = 6,8\text{ nF}$, puis pour (b) $R = 680\text{ k}\Omega$ et $C = 47\text{ pF}$.

Étude expérimentale.

Les tensions d'entrée $u_e(t)$ et de sortie $u_s(t)$ sont appliquées aux bornes d'un oscilloscope en couplage *DC*. L'analyse des signaux à l'oscilloscope donne des résultats très voisins de la théorie dans le cas (a), alors que $G_{dB,max}$ et f_c sont différents des prédictions théoriques dans le cas (b).

Pour expliquer l'écart constaté, on est amené à prendre en compte l'impédance d'entrée de l'oscilloscope en couplage *DC*. Le schéma électrique équivalent est représenté figure 5.

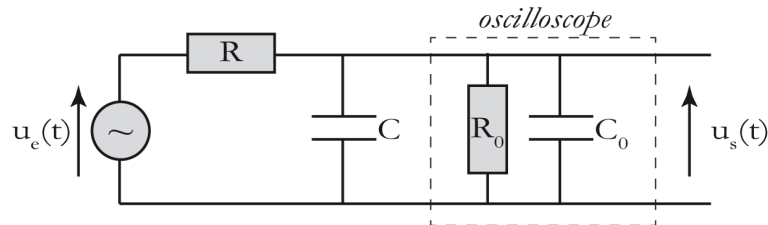


FIGURE 5 – Filtre *RC* branché aux bornes de l'oscilloscope en couplage *DC*.

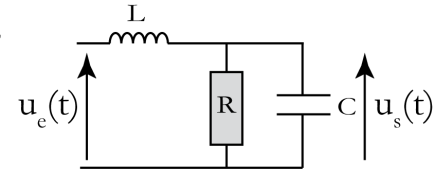
8. Déterminer la nouvelle fonction de transfert $\underline{H}'(j\omega)$ du filtre *RC* branché aux bornes de l'oscilloscope en couplage *DC*. La nature du filtre a-t-elle changé ?
Donner sa forme canonique en définissant les paramètres nécessaires.
9. Préciser les nouvelles expressions du gain maximal en décibel et de la fréquence de coupure.
Faire les applications numériques pour les cas (a) et (b). Conclure.

IV. Obtention d'une tension constante réglable

Analyse fréquentielle du circuit

On commence par analyser le circuit ci-dessus en l'alimentant pour cela par une tension $u_e(t)$ sinusoïdale d'amplitude E et de pulsation ω :

$$u_e(t) = E \cos(\omega t)$$



On suppose le régime sinusoïdal forcé atteint et l'on s'intéresse à la réponse en tension $u_s(t) = U_s \cos(\omega t + \varphi)$ aux bornes de l'ensemble $R//C$. On note $\underline{u}_s(t) = \underline{U}_s e^{j\omega t}$ le complexe associé à $u_s(t)$.

1. À l'aide de schémas équivalents du circuit, prévoir sans calcul ce que vaut la tension u_s à très basse fréquence ($\omega \rightarrow 0$) ainsi qu'à très haute fréquence ($\omega \rightarrow \infty$).
2. Montrer que, pour une pulsation ω quelconque :

$$\underline{U}_s = \frac{E}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{\omega_0 Q}}$$

Donner les expressions de ω_0 et Q en fonction de R , L et C .

3. Déterminer l'expression mathématique de l'amplitude U_s de $u_s(t)$.
4. Déterminer la phase à l'origine φ de $u_s(t)$.

Fabrication de la tension continue

Le but de cette partie est de déterminer la réponse en tension $s(t)$, toujours aux bornes du groupement $R//C$, mais pour une tension d'entrée $e(t)$ de forme créneau périodique de période T . Son expression temporelle sur sa première période est :

$$e(t) = \begin{cases} E & \text{si } 0 < t < \alpha T \\ 0 & \text{si } \alpha T < t < T \end{cases}$$

avec $0 < \alpha < 1$ une constante ajustable.

5. Tracer, sur deux périodes, la représentation de e en fonction du temps t .
6. Calculer la valeur moyenne de $e(t)$.

On donne la décomposition en série de Fourier de $e(t)$, à partir de ses harmoniques $a_n(t)$:

$$e(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \psi_n)$$

où les coefficients A_n et ψ_n sont supposés connus.

7. Donner l'expression de la réponse en tension $s_n(t)$, aux bornes du groupe $R//C$, correspondant à une tension d'entrée harmonique $a_n(t) = A_n \cos(n\omega t + \psi_n)$.
8. Donner alors l'expression complète de la tension $s(t)$ aux bornes du groupe $R//C$ dans le cas où la tension d'entrée est le créneau $e(t)$.
9. On suppose que $\omega \approx 10\omega_0$. Justifier que $s(t)$ peut être considérée comme constante et déterminer son expression approchée.
10. Évaluer le *taux d'ondulation*, c'est-à-dire le rapport entre l'amplitude du premier terme variable du développement en série de Fourier et le terme constant s_0 . On prendra le cas $\alpha = \frac{1}{2}$ où $A_1 = \frac{4E}{\pi}$, et $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

* * * FIN DE L'ÉPREUVE * * *