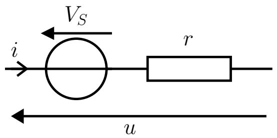
ÉLECTRICITÉ

I. Alimentation d'une diode électroluminescente

1. La relation courant-tension correspondant à la droite du régime « passant » est

$$u = V_S + ri$$

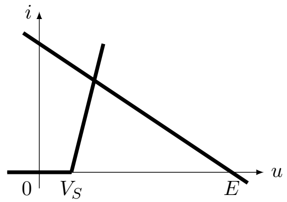
ce qui correspond au schéma ci-contre.



2. **a)** Le dipôle constitué de la fem E et de la résistance R a pour relation courant tension

$$u = E - Ri \quad \Leftrightarrow \quad i = \frac{E}{R} - \frac{u}{R}.$$

Sa caractéristique est donc une droite de pente négative et d'ordonnée à l'origine positive (cf ci-contre) croisant l'axe des abscisses en $u = E > V_S$. L'intersection avec la caractéristique de la diode est donc nécessairement dans le domaine passant.



b) La loi des mailles s'écrit donc $u = E - Ri = V_s + ri$ ce qui donne $\boxed{i = \frac{E - V_S}{R + r}}$. On en déduit $\boxed{R_0 = \frac{E - V_S}{i_0} - r} = \underline{2,8 \times 10^2\,\Omega}$.

c) Le courant traversant la source est maintenant $2i_0$, d'où par la loi des mailles

$$E - 2R_0' i_0 = V_S + ri_0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{R_0' = \frac{1}{2}\left(\frac{E - V_S}{i_0} - r\right) = \frac{R_0}{2}} = \underline{1,4 \times 10^2\,\Omega}.$$

On voit que $\boxed{R_0 \gg r}$, donc la résistance dynamique de la diode est ici négligeable à mieux qu'1% près.

d) Les puissances reçues par R_0' et par la diode sont respectivement $\boxed{P_R = 4R_0' i_0^2} = \underline{0,13\,\text{W}}$ et $\boxed{P_d = V_S i_0 + r i_0^2} = \underline{0,027\,\text{W}}$.
D'après la loi des mailles précédente, on obtient en multipliant par le courant $2i_0$:

$$P_g = E2i_0 = (V_S + ri_0 + R_0' 2i_0).2i_0 \quad \text{d'où} \quad \boxed{P_g = 2P_d + P_R} = \underline{0,18\,\text{W}}.$$

Ainsi **toute la puissance fournie par la source est bien intégralement reçue par tous les autres dipôles.** On constate que **la majeure partie est dissipée dans** R_0'.

3. **a)** Le dipôle $\{R_1, R_2, E\}$ auquel est associée la branche de la diode peut être converti en un générateur de Thévenin équivalent (de même orientation) de f.e.m $E_{\text{Th}} = E/(1+R_2/R_1)$ et de résistance interne $R_{\text{Th}} = (1/R_1 + 1/R_2)^{-1}$. SCHEMA
On est donc ramené à la situation des questions **2.a)** et **2.b)**. La diode est passante à la condition que

$$E_{\text{Th}} > V_S \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{R_1 > \frac{R_2}{E/V_S - 1}} = \underline{0,43\,\Omega}.$$

Autre méthode : on peut aussi supposer la diode passante, calculer u (ou le courant i qui la traverse) et imposer $u > V_s$ (ou $i > 0$). On peut encore supposer la diode bloquée donc $i = 0$, puis imposer $u < V_s$ et ensuite nier cette condition.

b) Le calcul fait en **2.b)** est adapté en remplaçant E par E_{Th} et R par $R + R_{\text{Th}}$, ce qui donne

$$\boxed{i = \frac{E_{\text{Th}} - V_S}{R + R_{\text{Th}} + r} = \frac{E/(1+R_2/R_1) - V_S}{R + (1/R_1 + 1/R_2)^{-1} + r} = \frac{E - V_S(1 + R_2/R_1)}{R_2 + (R+r)(1 + R_2/R_1)}} = \underline{15\,\text{mA}}.$$

On obtient donc **le même niveau d'éclairement que précédemment**.

c) On en déduit la puissance consommée par la diode n'a pas changé car le courant est le même : $\boxed{P_d = (V_S + ri)i} = \underline{0,027\,\text{W}}$.
Le générateur est traversé par un courant i_2 (orienté comme E) somme de i et du courant i_1 traversant R_1, à savoir

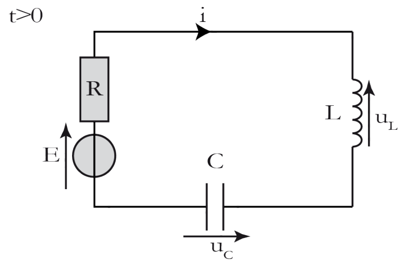
SCHEMA $\quad i_1 = \frac{1}{R_1}(V_S + (R+r)i) \quad$ d'où $\quad \boxed{P_g = Ei_2 = E\left(\frac{V_S}{R_1} + i\left(1 + \frac{R+r}{R}\right)\right)} = \underline{0,13\,\text{W}}.$

Ce circuit est donc plus économe en énergie, pour un même niveau d'éclairement.

II. Étude d'un flash d'appareil photographique

1. En régime permanent continu, la bobine est équivalente à un fil, alors $\boxed{u_{L\infty} = 0}$.

2. La loi des mailles donne pour tout $t > 0$: $E = Ri + u_L + u_C$.



La tension u_C aux bornes du condensateur est continue, et comme il était initialement déchargé, cette tension reste nulle pour $t = 0^+$: $u_C(t = 0^+) = 0$.
De plus, le courant traversant la bobine est lui aussi continu et comme il était nul avant la fermeture de l'interrupteur, il reste nul pour $t = 0^+$: $i(t = 0^+) = 0$.
Ainsi, il reste

$$E = Ri(0^+) + u_L(0^+) + u_C(0^+) \Rightarrow \boxed{u_L(0^+) = E}.$$

3. On dérive la loi des mailles obtenue ci-dessus pour $t > 0$:

$$0 = R\frac{di}{dt} + \frac{du_L}{dt} + \frac{du_C}{dt}$$

Or $i = C\frac{du_C}{dt}$ et $u_L = L\frac{di}{dt}$, d'où

$$0 = \frac{R}{L}u_L + \frac{du_L}{dt} + \frac{i}{C}$$

On redérive à nouveau cette équation :

$$0 = \frac{R}{L}\frac{u_L}{dt} + \frac{d^2u_L}{dt^2} + \frac{1}{LC}u_L \Rightarrow \boxed{\frac{d^2u_L}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{u_L}{dt} + \frac{1}{LC}u_L = 0}$$

4. On pose la pulsation propre

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} = \underline{3,7.10^5\,\text{rad.s}^{-1}}$$

On pose le facteur de qualité Q tel que

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L} \Rightarrow \boxed{Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}} = \underline{2,7.10^4}.$$

5. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants du second ordre sans second membre. Déterminons les solutions de l'équation caractéristique :

$$x^2 + \frac{\omega_0}{Q}x + \omega_0^2 = 0$$

Son discriminant s'écrit

$$\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2\left(\frac{1}{4Q^2} - 1\right) < 0 \quad \text{car} \quad Q \geq \frac{1}{2}$$

Le régime est donc **pseudo-périodique**, et les solutions sont, en notant j l'imaginaire pur tel que $j^2 = -1$:

$$x_\pm = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

Ainsi, en posant la **pseudo-pulsation** $\boxed{\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$ et le **temps caractéristique d'amortissement** $\boxed{\tau = \frac{2Q}{\omega_0}}$, on a :

$$\boxed{u_L(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}\left(A\cos\Omega t + B\sin\Omega t\right)}$$

où A et B sont des constantes d'intégration réelles.
Pour déterminer ces constantes, on connaît $u_L(0^+) = E$ et on doit déterminer $\frac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t}(0^+)$. La première dérivation de la loi des mailles donne pour tout $t > 0$:

$$0 = \frac{R}{L}u_L + \frac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t} + \frac{i}{C} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t}(0^+) = -\frac{R}{L}u_L(0^+) - \frac{i(0^+)}{C} = -\frac{R}{L}E - 0\,.$$

On en déduit

$$u_L(0^+) = \boxed{A = E} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t}(0^+) = -\frac{A}{\tau} + B\Omega = -\frac{R}{L}E \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = \frac{E}{\Omega}\left(\frac{1}{\tau} - \frac{R}{L}\right) = -\frac{RE}{2L\Omega}}.$$

6. Le temps caractéristique pour atteindre $u_{L\infty}$ est de l'ordre de

$$\boxed{\tau = \frac{2Q}{\omega_0} = \frac{2L}{R}} = \underline{0,14\,\mathrm{s}}$$

7. Il s'agit d'un circuit du premier ordre. La charge maximale correspond au régime permanent atteint lorsque l'interrupteur est sur la position (1) depuis longtemps. Le condensateur est alors équivalent à un interrupteur ouvert et donc $u_{C'} = E' = \frac{q'_{max}}{C'}$. Donc $\boxed{q'_{max} = C'E'} = \underline{4,50 \times 10^{-2}\,\mathrm{C}}$.

L'énergie emmagasinée par le condensateur est alors $\boxed{E_e = \frac{1}{2}C'E'^2} = \underline{6,8\,\mathrm{J}}$.

8. Une fois l'interrupteur en position (2), R_f et C' sont en parallèle. L'égalité des tensions donne, avec l'intensité du courant donnée par la loi de fonctionnement du condensateur,

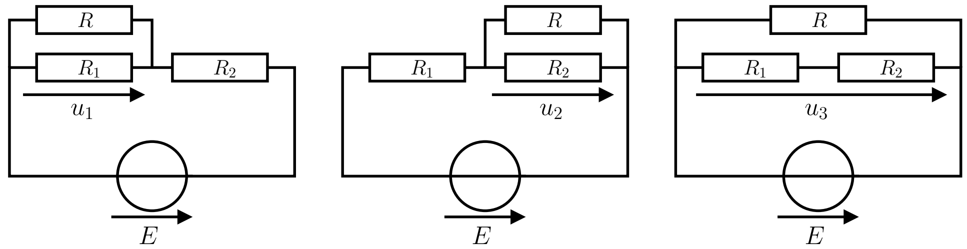
$$u_{C'} = R_f i = R_f C'\frac{\mathrm{d}u_{C'}}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}u_{C'}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau'}u_{C'} = 0} \quad \text{avec} \quad \boxed{\tau' = R_f C'} = \underline{1,5\,\mathrm{ms}}$$

le temps caractéristique de la décharge. C'est une équation différentielle du premier ordre, linéaire, à coefficients constants et sans second membre. La solution de l'équation différentielle s'écrit $u_{C'}(t) = A'e^{-t/\tau'}$ où A' est une constante d'intégration. La condition initiale est donnée par le moment de basculement de l'interrupteur en position (2). La continuité de la tension aux bornes du condensateur C' donne

$$u_{C'}(0^-) = u_{C'}(0^+) = E' \Rightarrow E' = A' \Rightarrow \boxed{u_{C'}(t) = E'e^{-t/\tau'}}.$$

III. $2 + 3 = 6$

Le voltmètre doit nécessairement être considéré comme non idéal, c'est-à-dire de résistance d'entrée finie R, sinon la loi d'additivité des tensions est violée. On note u_{10} et u_{20} les deux tensions réelles aux bornes des résistors, c'est-à-dire celles qui existent en l'absence du voltmètre. Les trois mesures successives $u_1 = 2,0\,\mathrm{V}$, $u_2 = 3,0\,\mathrm{V}$ et $u_3 = 6,0\,\mathrm{V}$ peuvent être modélisées par les schémas correspondant ci-dessous.



Grâce à la loi du pont diviseur de tension, ces trois schémas conduisent aux relations suivantes :

$$u_1 = \frac{E}{1 + R_2(1/R + 1/R_1)} \quad ; \quad u_2 = \frac{E}{1 + R_1(1/R + 1/R_2)} \quad \text{et} \quad u_3 = E\,.$$

Ainsi $\boxed{E = 6,0\,\mathrm{V}}$. Les tensions réelles ne dépendent que du rapport $x = \frac{R_2}{R_1}$ selon les expressions

$$u_{10} = \frac{E}{1+x} \quad \text{et} \quad u_{20} = \frac{E}{1 + 1/x}\,.$$

Il faut donc trouver x. Les expressions de u_1 et u_2 ci-dessus permettent de trouver les rapports :

$$\frac{R_2}{R} = \frac{E}{u_1} - x - 1 \quad \text{et} \quad \frac{R_1}{R} = \frac{E}{u_2} - \frac{1}{x} - 1\,.$$

en divisant ces deux relations on obtient

$$x = \frac{\frac{E}{u_1} - x - 1}{\frac{E}{u_2} - \frac{1}{x} - 1} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x = \frac{u_2}{u_1}} = \underline{1,5}\,.$$

On en déduit alors

$$\boxed{u_{10} = \frac{E}{1+x}} = \underline{2,4\,\mathrm{V}} \quad \text{et} \quad \boxed{u_{20} = \frac{E}{1+1/x}} = \underline{3,6\,\mathrm{V}}\,.$$